공학 석사학위 논문

비정렬격자계에서의 예조건화 Navier-Stokes 수치기법 적용에 대한 연구

A Study on the Application of Preconditioned Navier-Stokes Equations to the Unstructured Grid System

아 주 대 학 교 대 학 원

기 계 공 학 과

이 용 훈

비정렬격자계에서의 예조건화 Navier-Stokes 수치기법 적용에 대한 연구

A Study on the Application of Preconditioned Navier-Stokes Equations to the Unstructured Grid System

지도교수 최 윤 호

이 논문을 공학 석사학위 논문으로 제출함

2010년 08월

아 주 대 학 교 대 학 원

기 계 공 학 과

이 용 훈

이용훈의 공학 석사학위 논문을 인준함.

심사 위원장 최 윤 호 인

심 사 위 원 유 재 석 인

심 사 위 원 이 병 옥 인

심 사 위 원 이 문 구 인

아 주 대 학 교 대 학 원

2010년 6월 25일

Psalm

온 땅이여 여호와께 즐거운 찬송을 부를지어다

Shout for joy to the Lord, all the earth.

기쁨으로 여호와를 섬기며 노래하면서 그의 앞에 나아갈지어다

Worship the Lord with gladness; come before him with joyful songs.

여호와가 우리 하나님이신 줄 너희는 알지어다 그는 우리를 지으신 이요 우리는 그의 것이니 그의 백성이요 그의 기르시는 양이로다

Know that the Lord is God. It is he who made us, and we are his; we are his people, the sheep of his pasture.

감사함으로 그의 문에 들어가며 찬송함으로 그의 궁정에 들어가서 그에게 감사하며 그의 이름을 송축할지어다

Enter his gates with thanksgiving and his courts with praise; give thanks to him and praise his name.

여호와는 선하시니 그의 인자하심이 영원하고
그의 성실하심이 대대에 이르리로다

For the Lord is good and his love endures forever;
his faithfulness continues through all generations.

시편 100편, 감사의 시.
Psalm 100, A psalm. For giving thanks.

감사의 글

부푼 꿈을 안고 시작한 2년의 대학원 생활이 이제 모두 지나고, 새로운 도약의 길을 향하고 있습니다. 힘들기도 했지만 그만큼 흥미로움과 즐거움이 가득했던 과정이었습니다. 이 기간 동안 하나의 작은 결실을 맺도록 도움을 주신 분들께 일일이 감사의 말씀을 드려야 하나, 본 지면으로 대신하고자 합니다.

먼저 항상 저를 먼저 생각하며 믿어주시고 기도해 주신 가족에게 감사합니다. 아버지, 어머니, 연주, 그리고 어린 시절 저를 키워주신 외할머니께 말로는 표현할 수 없는 감사함을 드립니다. 먼 곳에서 응원해 주신 할아버지, 할머니, 그리고 부족한 저를 잘 하리라 믿고 지켜봐 주신 많은 친지들께도 감사 드립니다.

학부 및 대학원 생활을 하는 긴 시간 동안 많은 것을 가르쳐주시고 지도해 주신 최윤호 교수님께 특별한 감사의 말씀을 드립니다. 교수님 덕에 부족한 제가 여기까지 오게 되었고, 새로운 출발을 준비할 힘을 얻게 되었습니다. 또한 좋은 엔지니어가 되도록 인도하여 주시고 조언해 주신 유재석 교수님, 이병옥 교수님, 이문구 교수님, 김현정 교수님, 김동권 교수님, 이종화 교수님, 그리고 그 외 많은 기계공학과 교수님께도 감사 드립니다. 실험실 선배이신 봉하 형, 덕영 형, 진원 형, 상철 형, 교순 형, 선호 형, 규익 형, 의진 누나, 그리고 후배인 수경, 재홍, 경석, 다희에게도 감사하며, 학부 동기인 지영, 재민, 재혁, 정옥, 희정, 범승, 그리고 후배인 대순, 아름, 성찬 등 많은 친구들에게도 고마움을 전합니다. 또 많은 도움을 주진 못해 미안하지만, 진원 형, 근태, 병동, 재홍 등, 신비차 팀에서도 좋은 소식이 들려오길 기대합니다.

SFC에서 함께 활동하며 참된 그리스도인의 모범을 보여주신 동현 형, 승근 형, 한별 누나, 재용 형, 세훈 형, 경광 형, 범진 형, 지금은 베트남에 있는 종운 형, 그리고 근복, 성경, 이제 미국으로 가게 될 준성, 2010년의 후반부를 책임질 자랑스런 후배 혜린, 또 믿음직하고 든든한 SFC 후배들, 함께한 시간들이 기쁨이었고, 앞으로 사회의 속한 영역에서 SFC 동문으로서 당당하게 하나님 나라를 건설해 나갈 것을 많은 선후배 및 동문들 앞에서 맹세하며 도움을 부탁 드립니다.

영적 아버지이신 안병만 목사님, 삶을 통하여 많은 모범을 보여주시는 김두만 목사님, 함께 한 시간 동안 그리스도의 사랑을 보여주신 김민수 목사님, 가끔밖에 못

뵙지만 따뜻하게 맞아주시는 고향 교회의 이항무 목사님, 모두 감사 드리며 사랑합니다. 또한 주께 헌신된 열정적인 삶을 통해 학부시절 많은 도전을 주신 한성훈 간사님, 강자옥 간사님, 그리고 남궁택 간사님, 이민형 간사님, 모두 감사 드리며 그 큰 사랑의 가르침대로 주의 인도하심을 따라 살아가도록 하겠습니다.

사랑하는 우리 몽골 목장의 목자이신 보은 누나, 방송실에서 오랜 시간을 함께한 병진 형, 열심히 당당히 사는 모습이 아름다워 더욱 사랑스런 어뜨기, 그리고 아직은 서로에 대해 많이 모르지만 앞으로 더욱 친밀해질 우리 목장의 새로운 맴버 연홍, 우리 몽골 목장이 있었기에 어려움을 이겨낼 수 있었으며, 함께 기도하던 그 시간들이 많은 위로와 기쁨으로 다가왔습니다. 모두 너무 고맙고, 앞으로 함께 할 날들을 기대하며 저 역시 기쁨으로 새로운 길을 걸어나가려 합니다.

또 지난 수 년간 저의 멘토와 같았던 재훈 형과 문정 누나의 앞날을 축복하며 축하합니다. (이제는 공개해도 되는 거 맞죠?) 그리고 길문 형과 하나 누나의 앞날도 축복하며 축하합니다. 믿음직한 종철 형과 대기 형, 제 뒤를 이어 아주대를 지켜(?) 주실 은혜 누나, 당당한 카리스마와 부드러운 여성스러움을 모두 갖춘 멋진 보혜 누나, 무한한 힘이 되어주신 열방교회 청년회 모두에게 감사합니다. 학교와 교회에서 함께한 후배 세원, 다혜, 금미, 은창, 은혁, 호철, 승규, 현지, 잘 자라서 큰 일꾼이 되렴! 독일에서 열심히 공부하는 우리 동기 지혜, 결혼 축하해!

서로 바쁜 일상 가운데 자주 만나지는 못하지만, 같은 추억을 가지고 있다는 것만으로도 서로를 위해 기쁨과 걱정을 함께하는 은준, 태한, 승진, 대환, 태엽, 모두 고맙고 너희들이 있어서 언제나 든든하다.

그리고 아직은 서로 힘들고 어색한 가운데, 예전처럼 친근한 친구처럼 대해주지 못해 미안한, 따뜻한 말조차 한마디 하지 못해 더 미안한…, 언젠가는 내 미안하고도 감사한 맘을 표현할 날이 오기를 바라며…, 미안해. 그리고 정말 고마워.

이외에 너무 바쁘고 정신이 없어서 지면에서 빠뜨린 분들, 그리고 알게 모르게 많은 도움을 주셨던 분들께도 감사의 말씀을 드리며, 이 작은 결과물을 바칩니다.

2010년 6월 25일, 감사의 마음을 담아,
이 용 훈 올림.

요 약 문

본 연구에서는 비정렬격자계를 기반으로 하는 예조건화 압축성 Navier-Stokes 방정식을 해석하는 코드를 분석하고, 수치해석 기법을 이해하였으며, 다양한 시험 문제들을 통하여 평가하였다. 시간전진법에서 나타나는 저 마하수에서의 수렴성 저하 문제를 해결하기 위하여 시간항에 포함된 변수를 가상의 변수로 대체하여 지배방정식을 수정하는 예조건화 기법을 적용하였으며, 비정상 해석을 위하여 이중 시간 전진법을 사용하였다. 또한 복잡한 형상에서 격자 생성의 자유도가 높은 비정렬격자계를 도입하여 유한체적법으로 지배방정식을 이산화하였으며, 수치적 확산이 비교적 적게 일어나는 2차 공간 이산화를 위하여 최소 자승 변화량 구성법을 통한 2차 상류차분법을 적용하였다. 시간항에 대하여 내재적 Euler 방법으로 이산화를 수행하였으며, Point Gauss-Seidel(PGS) 및 비정렬격자계에 맞게 체적 탐색 기법이 수정된 Line Gauss-Seidel(LGS) 등의 선형 시스템 해법을 이용하여 해를 도출하였다. 최종적으로 본 코드를 이용하여 다양한 실제 문제를 해석한 결과 수렴성 및 해의 정확도를 확인할 수 있었다. 저 마하수(M=0.001) 점성 층류 유동부터 천음속을 거쳐 초음속(M=3)에서 발생하는 충격파 반사 문제까지 다양한 문제를 통하여 광범위한 속도 영역에서의 수렴성 및 해의 정확성을 검증하였으며, 비점성과 점성 유동에 대한 해석이 모두 가능함을 확인하였다. 또한 PGS 및 LGS 해법을 비교하여, 선형 해법에서 외재적 특성이 큰 PGS 에 비하여 내재적 특성이 포함된 LGS 기법이 더욱 안정적이고 결과적으로 높은 CFL 값을 사용할 수 있어서 계산시간을 절약할 수 있음을 확인하였다.

목 차

Psalm i
감사의 글 ii
요 약 문 iv
목 차 v
그 림 목 차 vii
표 목 차 ix
사 용 기 호 x

1. 서론 1
   1.1 전산유체역학 개요 1
   1.2 비정렬격자계 2
   1.3 시간전진법 및 예조건화 기법 3

2. 지배방정식 5
   2.1 압축성 Navier-Stokes 방정식 5
   2.2 예조건화 Navier-Stokes 방정식 6
      2.2.1 예조건화 행렬의 구성 9
      2.2.2 이중 시간전진법을 위한 예조건화 Navier-Stokes 방정식 11

3. 수치해석 기법 13
   3.1 비정렬격자계에서의 유한체적법 13
      3.1.1 제어체적에 대한 지배방정식의 적용 13
      3.1.2 플럭스 벡터 연산 15
   3.2 비정렬격자계에서의 변화량 구성 17
      3.2.1 최소자승 변화량 구성 18
   3.3 비정렬격자계에 대한 근사 내재적 해법 20
      3.3.1 Point Gauss-Seidel (PGS) 방법 21
      3.3.2 비정렬격자계 적용을 위한 수정 Line Gauss-Seidel (LGS) 방법 21

4. 계산결과 및 검토 25
4.1 평판 위 층류 경계층 유동 해석 25
4.2 Suddhoo-Hall 4요소 에어포일 유동 해석 29
4.3 RAE-2822 천음속 에어포일 유동 해석 32
4.4 단차를 가지는 풍동 충격파 해석 38

5. 결론 44
5.1 비정렬격자계에 대한 수치기법 44
5.2 다양한 유동 조건에서의 정상 및 비정상 해석 46

참고문헌 48

Appendix 52
A.1 비정렬격자계 데이터 구조 52
A.2 코드 구조 54
A.3 입력 파일 55
A.3.1 평판 위 층류 경계층 유동 해석 55
A.3.2 Suddhoo-Hall 4요소 에어포일 유동 해석 57
A.3.3 RAE-2822 천음속 에어포일 유동 해석 59
A.3.4 단차를 가지는 풍동 충격파 해석 61

Abstract 63

그 림 목 차

Fig. 1 example illustrations of various grid systems 3
Fig. 2 unsteady time advancement algorithm 12
Fig. 3 structure of a control volume 14
Fig. 4 flux evaluation at control volume interface 18
Fig. 5 stencil for least-square gradient calculation for cell-centered discretization .. 18
Fig. 6 sweep route in unstructured grid 22
Fig. 7 geometry, grid, and boundary type of flat plate laminar boundary layer flow 26
Fig. 8 convergence comparison between preconditioned and non- preconditioned solution for flat plate laminar boundary layer flow 26
Fig. 9 mach contour of flat plate laminar boundary layer flow 27
Fig. 10 x-velocity contour of flat plate laminar boundary layer flow 27
Fig. 11 y-velocity contour of flat plate laminar boundary layer flow 27
Fig. 12 comparison of x-velocity with respect to eta variable between Blasius solution and computation results 28
Fig. 13 conformal transformed airfoil by Karman-Trefftz function 29
Fig. 14 geometry and grid of Suddhoo-Hall 4 elements airfoil 30
Fig. 15 convergence of Suddhoo-Hall 4 elements airfoil using PGS and LGS 30
Fig. 16 pressure contour of Suddhoo-Hall 4 elements airfoil 31
Fig. 17 pressure coefficient plot of Suddhoo-Hall 4 elements airfoil 31
Fig. 18 geometry and grid of RAE-2822 airfoil 32
Fig. 19 computation domain of RAE-2822 airfoil 33
Fig. 20 pressure contour of RAE-2822 airfoil computation 34
Fig. 21 pressure contour of RAE-2822 airfoil by Slater[40] 34
Fig. 22 mach contour of RAE-2822 airfoil computation 35
Fig. 23 mach contour of RAE-2822 airfoil by Slater[40] 35

Fig. 24 mach contour of RAE−2822 airfoil using laminar N−S equation 36
Fig. 25 mach contour of RAE−2822 airfoil using Euler equation............................. 36
Fig. 26 mach contour of RAE−2822 airfoil using Spalart−Allmaras turbulent model 36
Fig. 27 pressure coefficient plot of RAE−2822 airfoil 37
Fig. 28 geometry of mach 3 wind tunnel with a step 39
Fig. 29 convergence of unsteady computation of mach 3 wind tunnel with a step ... 39
Fig. 30 density contour of wind tunnel with a step problem at 0.5 unit time 40
Fig. 31 density contour of wind tunnel with a step problem at 1.0 unit time 40
Fig. 32 density contour of wind tunnel with a step problem at 1.5 unit time 41
Fig. 33 density contour of wind tunnel with a step problem at 2.0 unit time 41
Fig. 34 density contour of wind tunnel with a step problem at 2.5 unit time 42
Fig. 35 density contour of wind tunnel with a step problem at 3.0 unit time 42
Fig. 36 density contour of wind tunnel with a step problem at 4.0 unit time 43
Fig. 37 unstructured solver for preconditioned Navier−Stokes code structure 54

표 목 차

Table. 1 conditions of the computation of flat plate laminar boundary layer flow ... 25
Table. 2 conditions of the computation of Suddhoo and Hall 4 elements airfoil....... 29
Table. 3 conditions of the computation of RAE−2822 transonic airfoil 33
Table. 4 conditions of the computation of mach 3 wind tunnel with a step............. 38

사 용 기 호

일반 변수

p	압력	ρ	밀도
T	온도	e	내부에너지
h	엔탈피	s	엔트로피
u,v	x, y 방향 속도	k	열 전도 계수
μ	점성 계수	ν	동 점성 계수
τ	가상 시간	t	물리적 시간
f	주파수	Ω	체적
Λ	고유치	ψ	유동 함수

벡터 변수

$\mathbf{Q}$	보존형 종속변수	$\mathbf{Q}_p$	원시 종속변수
$\mathbf{Q}'_p$	표준 종속변수	$\mathbf{E},\mathbf{F}$	x, y 방향 유동 벡터
$\mathbf{E}_v,\mathbf{F}_v$	x, y 방향 확산 항 벡터	$\mathbf{F}_i$	유동 벡터 배열
$\mathbf{V}_{ij}$	확산 항 요소 벡터	$\mathbf{n}$	법선 벡터
$\mathbf{M}_p$	고유 벡터	$\mathbf{R}$	잔차

행렬, 자코비안, 연산자

L_v	점성 연산자	$\mathbf{R}_{ij}$	확산계수 행렬
$\mathbf{\Gamma}$	종속변수 자코비안	$\mathbf{\Gamma}'$	예조건화 자코비안
H	Hessian	∇	변화량
L	하 삼각 행렬	U	상 삼각 행렬
D	대각 행렬		

무차원 변수, 정규화 변수

Re	Reynolds 수	M	마하수 (mach number)
St	Strouhal 수	η	상사 변수

아래 첨자

m	제어체적 인덱스	k	면 인덱스
i, j	좌표축 방향 인덱스	$\mathbf{n}$	법선 벡터와 내적
L	좌측	R	우측
p	압력에 대한 미분 (ρ_p, h_p)	T	온도에 대한 미분 (ρ_T, h_T)

위 첨자

-1	역수, 역행렬	T	행렬 전치 (transpose)
0	정체상태 물성치	n	현재 시간
$n+1$	다음 시간	$n-1$	이전 시간
$+$	양의 고유치 분할	$-$	음의 고유치 분할

약어

CFD	Computational Fluid Dynamics, 전산유체역학
GEMS	General Equations and Mesh Solver
FVM	Finite Volume Method, 유한체적법
CFL	Courant–Friedrichs–Lewy condition
SVD	Singular Value Decomposition, 특이값 분해
PGS	Point Gauss–Seidel
LGS	Line Gauss–Seidel
MOC	Method of Characteristics

1. 서론

1.1 전산유체역학 개요

전산유체역학(CFD)은 수치해석 기법과 알고리즘을 사용하여 유체의 열 유동을 해석하는 유체역학의 한 분야이며, 대부분의 전산유체 문제는 Navier-Stokes 방정식을 근간으로 한다. Navier-Stokes 방정식에서 점성 항을 제거하면 Euler 방정식이 되며, 여기에서 와류 항을 제거하고 선형화하면 선형 potential 방정식이 된다. 이러한 단순함으로 인해 초기의 전산유체 해석은 선형 potential 방정식으로부터 시작하였으며, 이후 3차원 완전 potential 방정식, Euler 방정식, 그리고 최종적으로 Navier-Stokes 방정식 해석 기법으로 확장되었다. 현재 많은 상용 및 연구용 코드에서 3차원 압축성 및 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 지배방정식으로 사용하고 있다[1-5].

일반적인 전산유체 해석 기법은 Euler 관점에서 유체의 미소 요소의 집합인 계산 격자를 통하여 수치 해를 구하며, 지배방정식을 계산 격자에 적용하기 위하여 유한차분법(FDM: finite difference method)을 사용하거나, 유한체적법(FVM: finite volume method)으로 명명되어 널리 사용되고 있는 Patankar의 제어체적법(control volume method)[6] 등을 사용한다. 일반적인 유한차분법은 테일러 급수 기반의 차분법으로 정렬격자계에 한정되나, 이를 제어체적에 맞게 변형한 유한체적법은 지배방정식을 제어체적에 대하여 적분하여 이산화 및 선형화하는 방법으로, 정렬격자계 또는 비정렬격자계를 자유롭게 사용하여 임의의 격자 연결 구조에 대응할 수 있다. 현재 복잡한 형상에 대하여 쉽고 빠른 격자 생성이 가능한 비정렬격자계가 보편화됨에 따라 최근 개발된 대부분의 전산유체 해석 코드는 유한체적법에 기반한다[7].

1980년대를 기점으로 전산유체 해석 기법은 컴퓨터의 발전 및 다양한 공학 분야에의 적용과 더불어 급속히 발전되어 왔으나, 해석에 사용되는 수치 기법은 다양한 유동 조건 및 영역에서의 해석의 정확성과 효율성을 모두 보장하기 어려운 실정이다. 역사적으로 전산유체 해석 기법은 비압축성의 저속 유동에 대한 기법과, 압축성이 고려된 마하 0.3 이상의 고속 유동에 대한 시간전진법의 두 가지로 나뉘어 발전하여

왔으며, 저속 및 고속 유동에 대한 각각의 기법은 서로 상대 속도 영역에 대하여 비효율적이거나 부정확한 해를 도출한다. 따라서 두 기법이 가지는 서로 상반된 문제를 해결하여 전 속도 영역에서 효율적이고 정확한 해를 도출하기 위한 다양한 연구가 각각의 분야에서 진행 중이다[8-9].

1.2 비정렬격자계

초기의 전산유체 해석 기법은 모든 내부 노드가 동일한 수의 인접 노드를 가지는 정렬격자계에 대하여 유한차분법으로 지배방정식을 이산화하는 방법을 근간으로 하였다. 정렬격자계에서는 모든 요소의 모양이 2차원에서 사각형 또는 3차원에서 육면체 모양이어야 하며, Fig. 1(a)와 같이 하나의 블록 안에서 각각의 방향에 대하여 일정한 수의 노드로 계산 영역을 구성하여야 한다. 정렬격자계를 기반으로 한 유한차분법은 고차의 정확도를 얻는데 유리하며 유도된 식이 간결하고 계산 속도가 빠른 장점을 가진다. 하지만 복잡한 형상에 대하여 계산 격자를 구성하는 것이 어렵거나 불가능하고, 격자 생성에 많은 시간과 노력이 소모된다. 따라서 정렬격자계의 정형성을 벗어나는 격자계의 필요성이 대두되었다.

비정렬격자계는 정렬격자계의 이러한 한계를 극복하기 위하여 개발되어 널리 사용되고 있으며[1,10-11], 메모리상에 별도로 정의된 임의의 연결 구조와 형상 정보를 가지는 각각의 개별 요소의 체적을 대상으로 유한체적법을 통해 이산화하는 것이 일반적이다. 계산 영역을 구성하는 요소의 모양은 다각형 또는 다면체일 경우 특별히 다른 제한을 받지 않으며, 2차원에서는 삼각형, 사각형, 또는 다각형이 사용되고, 3차원에서는 사면체, 피라미드, 프리즘, 육면체, 또는 다면체 등 다양한 형상이 사용될 수 있다. Delaunay나 advancing front 등 자동화된 격자 생성 방법으로 생성한 격자는 일반적으로 등방성(isotropic)을 가지나, 경계층 유동이나 복잡한 회전유동, 또는 충격파 계산 등에서 필요한 이방성 격자(anisotropic grid)를 구현하기 위하여 서로 다른 형상의 격자를 쉽게 혼합하여 사용할 수 있으며, Fig. 1(c)와 같이 정렬격자계와

비정렬격자계가 혼합된 경우를 별도로 비정렬 혼합격자계(unstructured hybrid grid system)로 지칭한다[3,10-11]. 다만 임의의 요소 형상에 대하여 비정렬격자계 수치 기법을 유도할 경우 비정렬 혼합격자계와 비정렬격자계의 구분이 무의미하며, 본 연구에서 사용된 코드 역시 다양한 격자 형상이 혼합된 격자계의 해석이 가능하다.

본 연구에서는 미국 Purdue University의 Merkle CFD Research Group에 의해 개발된 GEMS(General Equations and Mesh Solver) 코드[10,12]를 사용하였다. GEMS 코드는 유한체적법을 기반으로 비정렬 혼합격자계에 대한 해석이 가능한 코드로, 복잡한 형상에 대한 빠르고 효율적인 해석이 가능하며, 비압축성 및 압축성 유체에 대해 단일화된 예조건화 Navier-Stokes 방정식을 지배방정식으로 적용한 코드이다. 본 연구에서는 GEMS 코드에 사용된 수치 기법을 분석하여 비정렬격자계에 대한 해석 알고리즘 및 방법을 습득하고 정리하였다.

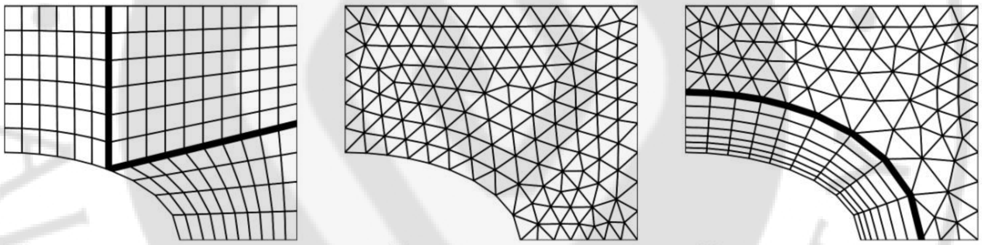

Fig. 1 example illustrations of various grid systems

1.3 시간전진법 및 예조건화 기법

시간전진법은 1966년 Moretti[13]에 의해 개발되었으며, 이를 통하여 과거에 해석해오던 정상상태 유동뿐만 아니라 비정상 유동 해석을 가능하게 하였다. 이는 전통적으로 압축성 유동을 해석하기 위하여 개발되고 발전된 방법으로, 정상상태에 도달할 때까지 지배방정식의 시간을 미소 시간 간격으로 전진시키는 방법이다[14]. 하지만 시간전진법은 비압축성 유동이나 저속의 압축성 유동에서는 계산 시간이 오래 소요되고 해가 부정확한 등의 비효율성을 가진다[15]. 이를 해결하기 위하여

Chorin[16]에 의한 가상압축성 기법과 Merkle and Choi[17]에 의한 섭동 전개(perturbation expansion)를 이용한 방법이 제안되었으나, 이 방법들은 저 마하수 영역을 벗어나면서 해가 부정확해지기 때문에 전 속도 영역의 유동에 적용하기 힘든 단점을 가진다[2,18]. 이러한 단점을 해결하기 위하여 Merkle and Choi[19]에 의해 예조건화 기법이 제안되었으며, 현재까지 압축성 해석 체계를 비압축성의 한계 영역까지 확장하기 위한 방법으로 널리 사용되고 있다[2,19-22].

예조건화 기법은 지배방정식의 시간항에 특정한 행렬을 곱하여서 지배방정식의 고유치를 조절하는 방법으로, Viviand[23], Briley, et al.[24] 등은 이를 Euler 방정식에 적용하였으며, Peyret and Viviand[25]는 이를 다시 Navier-Stokes 방정식에 적용하였다. 또한 Turkel[26]은 가상압축성 방법을 이용하여 비압축성과 압축성 유동 모두에 적용할 수 있는 예조건화 기법을 연구하였다. 하지만 초기에 개발된 예조건화 Navier-Stokes 방정식은 점성유동, 즉 저 Reynolds수 유동에 적용하면 그 수렴 성능이 크게 저하되어 비효율적이다[18]. 이를 개선하기 위하여 Choi and Merkle[20]은 원시변수로 이루어진 종속변수 $\mathbf{Q}_p = \left(p, u_i, T\right)^T$ 와 저 Reynolds수에서 음파 속도를 조절할 수 있는 변수를 도입하여 그들의 예조건화 기법을 수정하였으며 이를 통하여 점성 지배 유동부터 점성의 영향이 거의 없는 유동 영역까지 모두에 대하여 빠른 수렴 특성을 얻을 수 있었다.

위에서 설명한 예조건화 방정식은 지배방정식의 시간항에 특정 행렬을 곱하여 얻으므로, 비정상 해석에서 시간항에 대한 정확한 계산이 어려운 단점을 가진다. 이를 해결하기 위하여 Sankaran and Merkle[27]은 이중시간전진법을 도입하여 비정상 예조건화 방정식을 해석하였으며, 현재 이와 같이 예조건화를 위한 가상 시간과 물리적 시간을 별도로 진행하는 방법이 널리 사용되고 있다[28-29]. 본 연구에서 사용한 GEMS 코드는 임의의 상태방정식을 가지는 비압축성 및 압축성의 일반 유체에 대하여 이중시간전진 예조건화 Navier-Stokes 방정식[22]을 코드에 적용하였다. 실제로 GEMS 코드는 수렴성, 안정성, 그리고 효율성을 모두 만족하기 위하여 삼중시간전진 기법을 도입하고 있으나[12] 이는 이중시간전진 기법의 확장이며 알고리즘은 다르지 않으므로 본 논문에서는 이중시간전진 기법에 대하여서만 다루었다.

2. 지배방정식

2.1 압축성 Navier-Stokes 방정식

2차원 공간상에서의 압축성 Navier-Stokes 방정식은 다음의 벡터 식으로 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}=L_v\left(\mathbf{Q}_p\right) \tag{2.1}$$

위 식에서 벡터 $\mathbf{Q}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{F}$ 는 각각 연속방정식, 운동량방정식, 에너지방정식을 나타내기 위한 종속변수 벡터 및 유동벡터(flux vector)의 보존 형태이며, L_v 는 점성 연산자(diffusive operator), $\mathbf{Q}_p$ 는 압력, 온도 등의 원시 변수(primitive variable)로 이루어진 종속변수 벡터로, 그 세부적 내용은 다음과 같다.

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho e\end{pmatrix},\mathbf{E}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ (\rho e+p)u\end{pmatrix},\mathbf{F}=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ (\rho e+p)v\end{pmatrix},\mathbf{Q}_p=\begin{pmatrix}p\\ u\\ v\\ T\end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$L_v\left(\mathbf{Q}_p\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{R}_{xx}\frac{\partial \mathbf{Q}_p}{\partial x}+\mathbf{R}_{xy}\frac{\partial \mathbf{Q}_p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathbf{R}_{yx}\frac{\partial \mathbf{Q}_p}{\partial x}+\mathbf{R}_{yy}\frac{\partial \mathbf{Q}_p}{\partial y}\right) \tag{2.3}$$

식 (2.3)의 점성 연산자를 통하여 벡터 형태의 일반화된 확산 항(diffusion term)을 이용하는 방법은 Navier-Stokes 방정식 표현하기에 간단하면서도 수치해석적으로 유용하다. 연속방정식에서는 확산의 효과가 없으므로 확산 항에서 2차 미분 항에 사용된 주 변수는 $\mathbf{Q}_v=\left(\boxed{\text{NULL}},u,v,T\right)^T$ 로 쓰여질 수 있다. 하지만 종속변수 $\mathbf{Q}$ 와 대수

적 변환이 가능하도록 하기 위하여 압력 또는 밀도를 추가할 필요가 있으며[30], 본 연구에서는 압력을 이용한 주 변수 $\mathbf{Q}_p$ 를 선정하였다. 식 (2.3)에 나타난 확산계수 행렬(diffusion coefficient matrix) $\mathbf{R}_{ij}$ 은 다음과 같다.

$$\mathbf{R}_{xx}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\frac{4}{3}\mu&0&0\\0&0&\mu&0\\0&\frac{4}{3}\mu&\mu v&k\end{pmatrix}\qquad \mathbf{R}_{xy}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-\frac{2}{3}\mu&0\\0&\mu&0&0\\0&\mu v&-\frac{2}{3}\mu u&0\end{pmatrix}$$
$$\mathbf{R}_{yx}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&\mu&0\\0&-\frac{2}{3}\mu&0&0\\0&-\frac{2}{3}\mu v&\mu u&0\end{pmatrix}\qquad \mathbf{R}_{yy}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\mu&0&0\\0&0&\frac{4}{3}\mu&0\\0&\mu&\frac{4}{3}\mu v&k\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

본 연구에서 다루는 유체가 식 (2.5)와 같이 임의의 상태방정식을 가지는 것으로 가정하고 지배방정식을 유도할 경우, 임의의 유체에 대하여 적용 가능한 시스템을 유도할 수 있다[22].

$$\rho=\rho\left(p,T\right),\quad h=h\left(p,T\right),\quad \text{where}\quad \begin{cases}e=h^{0}-\dfrac{p}{\rho}\\ h^{0}=h+\dfrac{1}{2}\left(u^{2}+v^{2}\right)\end{cases} \tag{2.5}$$

2.2 예조건화 Navier-Stokes 방정식

일반적인 임의의 유체에 대하여 보존방정식을 확장하기 위하여 종속변수로 보존형 변수 벡터인 $\mathbf{Q}$ 를 사용할 수 없다. 예를 들면, 비압축성 유체의 경우 연속방정식

의 시간 미분 항이 사라져서 시스템이 특이(singular)해지는 문제가 발생한다. 따라서 압력과 온도 등의 원시변수로 이루어진 벡터 $\mathbf{Q}_p$ 를 종속변수로 정의하여서 이러한 문제를 해결하였다[10]. 종속변수 벡터로 $\mathbf{Q}_p$ 를 이용하면 예조건화 방정식의 유도에 편리하며, 압축성과 비압축성 및 임의의 상태방정식을 가지는 유체에 적용이 편리하다. 또한 식 (2.3)에 나타난 확산 항 역시 $\mathbf{Q}_p$ 의 항으로 표현되기 때문에 지배방정식의 선형화에도 유리하다. 시간 미분 항에 대하여 종속변수를 변환하면 다음과 같다.

$$\mathbf{\Gamma}\frac{\partial \mathbf{Q}_p}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{V}_{xx}+\mathbf{V}_{xy}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathbf{V}_{yx}+\mathbf{V}_{yy}\right) \tag{2.6}$$

여기서 자코비안 $\mathbf{\Gamma}$ 와 벡터 $\mathbf{V}_{xx}$, $\mathbf{V}_{xy}$, $\mathbf{V}_{yx}$, $\mathbf{V}_{yy}$ 는 식 (2.7)과 식 (2.8)에 나타내었으며, 각 변수에 붙은 아래 첨자는 첨자 변수에 대한 편 미분을 의미한다.

$$\mathbf{\Gamma}=\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{Q}_p}=\begin{pmatrix} \rho_p & 0 & 0 & \rho_T \\ u\rho_p & \rho & 0 & u\rho_T \\ v\rho_p & 0 & \rho & v\rho_T \\ h^0\rho_p+\rho h_p-1 & \rho u & \rho v & h^0\rho_T+\rho h_T \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{xx}&=\mathbf{R}_{xx}\frac{\partial \mathbf{Q}_p}{\partial x}=\left(0,\ \frac{4}{3}\mu\frac{\partial u}{\partial x},\ \mu\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{4}{3}\mu u\frac{\partial u}{\partial x}+\mu v\frac{\partial v}{\partial x}+k\frac{\partial T}{\partial x}\right)^T\\
\mathbf{V}_{xy}&=\mathbf{R}_{xy}\frac{\partial \mathbf{Q}_p}{\partial y}=\left(0,\ -\frac{2}{3}\mu\frac{\partial v}{\partial y},\ \mu\frac{\partial u}{\partial y},\ \mu v\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu u\frac{\partial v}{\partial y}\right)^T\\
\mathbf{V}_{yx}&=\mathbf{R}_{yx}\frac{\partial \mathbf{Q}_p}{\partial x}=\left(0,\ \mu\frac{\partial v}{\partial x},\ -\frac{2}{3}\mu\frac{\partial u}{\partial y},\ -\frac{2}{3}\mu v\frac{\partial u}{\partial x}+\mu u\frac{\partial v}{\partial x}\right)^T\\
\mathbf{V}_{yy}&=\mathbf{R}_{yy}\frac{\partial \mathbf{Q}_p}{\partial y}=\left(0,\ \mu\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{4}{3}\mu\frac{\partial v}{\partial y},\ \mu u\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{4}{3}\mu v\frac{\partial v}{\partial y}+k\frac{\partial T}{\partial y}\right)^T
\end{aligned} \tag{2.8}$$

점성 및 비점성 지배방정식의 형태를 동일하게 만들기 위해 식 (2.9)와 식 (2.10)의 새로운 벡터를 정의하여 대류 항과 확산 항을 결합할 수 있으며, 식 (2.6)에 대입하여 정리하면 Navier-Stokes 방정식을 식 (2.11)의 형태로 표현할 수 있다[30].

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \left(\mathbf{V}_{xx} + \mathbf{V}_{xy}\right) = \mathbf{E} + \mathbf{E}_v$$
$$= \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \rho uv - \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \left(\rho e + p\right)u - \left(\mu\left(u\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) + k\frac{\partial T}{\partial x}\right) \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - \left(\mathbf{V}_{yx} + \mathbf{V}_{yy}\right) = \mathbf{F} + \mathbf{F}_v$$
$$= \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv - \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \rho v^2 + p - \mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\ \left(\rho e + p\right)v - \left(\mu\left(v\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) + k\frac{\partial T}{\partial y}\right) \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

$$\mathbf{\Gamma}\frac{\partial \mathbf{Q}_p}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial y} = 0 \tag{2.11}$$

2.2.1 예조건화 행렬의 구성

2차원 운동방정식의 일반화를 통해 얻은 식 (2.11)는 3차원에서도 동일한 방법으로 유도할 수 있으며, 이를 차원에 상관없이 일반화하여 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{\Gamma}\frac{\partial \mathbf{Q}_p}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i}=0 \tag{2.12}$$

여기서 식 (2.12)는 차원에 독립적이며 각 항에 나타난 변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i &= \mathbf{E}'i+\mathbf{F}'j+\cdots \\ x_i &= x\left(x_1,x_2,\cdots\right)\end{aligned} \tag{2.13}$$

비압축성 유체에 식 (2.12)을 적용할 경우 시간 미분 항이 사라지는 문제는 피할 수 있지만, 시간 미분 항에 곱해지는 ρ_p 항이 사라지며, 이로 인하여 계수 행렬 $\mathbf{\Gamma}$가 특이해지는 문제가 발생한다. 정상상태를 가정하고 식 (2.12)를 계산할 경우 시간 미분 항은 가상 시간 τ에 대한 항이며 최종적으로 0에 수렴하도록 만드는 것이 목적이므로, $\mathbf{\Gamma}$에 포함된 실제 변수를 행렬이 특이성을 가지지 않도록 하는 가상의 변수로 대체할 수 있다. 기존 연구에 의하면 각 문제에 따라 ρ_p, ρ_T, h_p, h_T 항을 뒤에서 설명할 가상의 변수 ρ'_p, ρ'_T, h'_p, h'_T로 대체하면, 대체된 변수로 구성된 계수 행렬 $\mathbf{\Gamma}'$을 좋은 조건(well-conditioned)의 행렬로 만들 수 있으며, 대개 변수 ρ_p에 대한 수정만으로도 좋은 조건 행렬이 얻어진다[10,22]. 정상상태의 예조건화 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{\Gamma}'\frac{\partial \mathbf{Q}_p}{\partial \tau}+\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i}=0 \tag{2.14}$$

$$\mathbf{\Gamma}' = \begin{pmatrix} \rho'_p & 0 & 0 & \rho'_T \\ u\rho'_p & \rho & 0 & u\rho'_T \\ v\rho'_p & 0 & \rho & v\rho'_T \\ h^0\rho'_p + \rho h'_p - 1 & \rho u & \rho v & h^0\rho'_T + \rho h'_T \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

행렬 (2.15)에서 사용된 예조건화를 위한 가상 변수는 다음과 같다[31].

$$\rho'_p = \frac{1}{V_p^2} \quad \text{where} \quad V_p = \min\left[\max\left(V_{inv}, V_{pgr}, V_{vis}\right), c\right] \tag{2.16}$$

여기서 V_{inv} 는 비점성 속도 척도, V_{pgr} 는 압력구배 속도 척도, 그리고 V_{vis} 는 점성 속도 척도로 각각 다음과 같이 정의된다.

$$V_{inv} = \sqrt{\frac{\rho h_T}{d'}}$$

$$\text{where} \quad \begin{cases} d = \rho h_T \rho_p + \rho_T \left(1 - \rho h_p\right), \\ d' = \rho h_T \rho'_p + \rho'_T \left(1 - \rho h_p\right), \\ d' = \dfrac{d}{M_p^2}, \quad M_p = \min\left(M_{inv}, 1\right), \quad M_{inv} = \dfrac{V}{c} \end{cases} \tag{2.17}$$

$$V_{pgr} = \sqrt{\frac{|\Delta p|}{\rho}} \tag{2.18}$$

$$V_{vis} = \frac{V}{\mathrm{Re}_{\Delta x}} = \frac{\nu}{\Delta x} \tag{2.19}$$

2.2.2 이중 시간전진법을 위한 예조건화 Navier-Stokes 방정식

식 (2.14)의 정상상태 예조건화 Navier-Stokes 방정식은 물리적 시간의 진행이 고려되지 않고 가상 시간에 대한 항만으로 구성되어 있다. 이 식에 비정상 해석을 위하여 물리적 시간 진행에 대한 항을 추가하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{\Gamma}'\frac{\partial \mathbf{Q}_p}{\partial \tau}+\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i}=0 \tag{2.20}$$

체적에 대한 적분을 용이하게 하기 위하여 시간에 대한 차원을 공간에 대한 차원과 동일하게 바꾸어 식을 재구성하면 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\mathbf{\Gamma}'\frac{\partial \mathbf{Q}_p}{\partial \tau}+\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i}=0 \tag{2.21}$$

여기서 벡터 $\mathbf{F}_i$와 변수 x_i는 물리적 시간 t에 대한 차원을 포함하여 식 (2.22)와 같이 다시 정의된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i &= \mathbf{Q}n_t+\mathbf{E}'i+\mathbf{F}'j+\cdots \\ x_i &= x\left(t,x_1,x_2,\cdots\right)\end{aligned} \tag{2.22}$$

자코비안 행렬 $\mathbf{\Gamma}'$는 정상상태 방정식에서와 동일하며, 예조건화를 위한 가상의 변수는 비정상 항을 고려하여 다음과 같이 수정된다[31].

$$V_p=\min\left[\max\left(V_{inv},V_{pgr},V_{vis},V_{uns}\right),c\right] \tag{2.23}$$

여기서 V_{uns}는 비정상 예조건화 속도 척도로, 높은 Strouhal수의 비정상 유동에

대한 한계 값을 제공하며, 다음과 같이 정의된다[32].

$$V_{uns} = \max\left[u\mathrm{St}_x, v\mathrm{St}_y, \cdots\right] \tag{2.24}$$

$$\text{where} \quad \mathrm{St}_x = \frac{fL_x}{V_x} = \frac{\Delta x}{u\Delta t}, \quad \mathrm{St}_y = \frac{fL_y}{V_y} = \frac{\Delta y}{v\Delta t}, \quad \cdots$$

가상 시간과 물리적 시간에 대한 진행은 Fig. 2과 같은 알고리즘으로 진행된다. 먼저 동일한 물리적 시간 스텝에 대하여 가상 시간만을 진행하며 계산을 수행한다. 현재의 시간에 대한 해가 수렴할 경우 물리적 시간을 1회 진행한 후, 갱신된 물리적 시간 스텝에 대하여 동일하게 가상 시간만을 진행하며 계산을 수행한다.

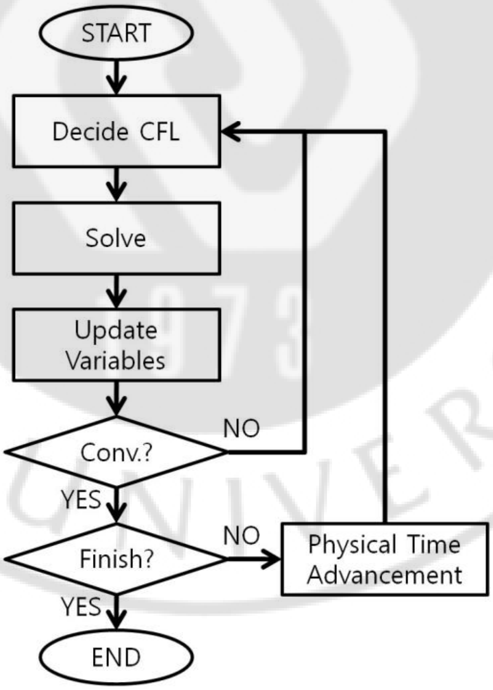

Fig. 2 unsteady time advancement algorithm

3. 수치해석 기법

3.1 비정렬격자계에서의 유한체적법

3.1.1 제어체적에 대한 지배방정식의 적용

앞서 유도한 비정상 예조건화 Navier-Stokes 방정식을 체적에 적용하기 전에 새로운 변수 $\mathbf{Q}'$을 정의하여 식 (3.2)의 표준 형식 방정식으로 변환하였다.

$$d\mathbf{Q}' = \mathbf{\Gamma} d\mathbf{Q}_p \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{Q}'}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.2}$$

식 (3.2)을 임의의 체적 Ω에 대하여 적분하고 공간 미분 항에 가우스 발산 정리(Gauss' divergence theorem)를 적용하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{Q}'}{\partial \tau} dV + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \tag{3.3}$$

여기서 $\mathbf{n}$은 면 $\partial\Omega$에 대한 단위 법선 벡터이다. 또한 식 (3.3)에 나타난 시간항의 적분은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{Q}'}{\partial \tau} dV = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{\Omega} \mathbf{Q}' dV = \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}'}{\partial \tau} \Omega \tag{3.4}$$

가우스 발산 정리를 통해 변환된 대류 항은 제어체적을 구성하고 있는 외곽의

면에 대한 적분이다. 수치적인 적용을 위해 제어체적 외곽의 면은 Fig. 3와 같이 유한한 개수의 평면들로 구성되어 있다. 따라서 각 평면에 대한 대류 항을 계산하여 그 합을 구하면 적분을 손쉽게 수행할 수 있으며, 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \sum_{k=1}^{K}\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{n}_k \tag{3.5}$$

또한 변수 상단에 붙은 윗줄은 체적에 대한 평균 값을 나타낸다. 따라서 $\mathbf{Q}'$ 의 평균 값은 $\mathbf{\Gamma}$ 와 $\mathbf{Q}_p$ 의 평균 값으로 정의하여 $\partial\bar{\mathbf{Q}}' = \bar{\mathbf{\Gamma}}\partial\bar{\mathbf{Q}}_p$ 로 나타낼 수 있으며, 식 (3.4)의 시간 미분 항과 식 (3.5)의 대류 항을 합쳐서 두 항에 행렬 $\bar{\mathbf{\Gamma}}_m^{-1}$ 을 곱해주면 최종적으로 식 (3.6)을 얻을 수 있다[10].

$$\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{Q}}_p}{\partial\tau}\right)_m \Omega + \bar{\mathbf{\Gamma}}_m^{-1}\sum_{k=1}^{K}\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{n}_k = 0 \tag{3.6}$$

여기서 아래첨자 m 은 m 번째 제어체적을 의미하며, k 는 제어체적을 구성하고 있는 k 번째 면을 의미한다. 이 적분 형태의 지배방정식은 체적 내부의 완전한 해의 변화를 제공하는 대신, 제어체적 내부의 평균 값만을 제공한다. 따라서 유한체적법을 통한 해석은 엄밀 해에 대한 근사 해만을 제공한다.

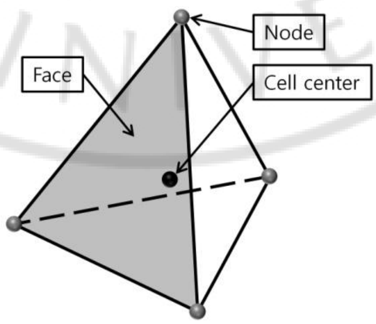

Fig. 3 structure of a control volume

3.1.2 플럭스 벡터 연산

유한체적법을 통해 얻은 식 (3.6)을 연산하기 위하여 셀 m 을 구성하는 각각의 면 k 에서의 플럭스 벡터(flux vector) $\mathbf{F}_k$ 값을 정의하여야 한다. 비정렬격자계에서 비점성 플럭스를 표현하는 가장 일반적인 방법은 근사 리만 해법(approximate Riemann solver)이며, Roe 해법[33], HLL 해법[34] 및 이를 응용한 HLLE 해법[35] 등이 대표적이다. 근사 리만 해법은 면의 좌 우측에서의 수치적 플럭스를 지정함으로써 사용될 수 있다. 면에 대한 플럭스는 면에 대한 법선 방향으로의 플럭스를 의미하며, 이는 단위 법선 벡터와의 내적을 취하여 얻을 수 있다. 표현을 간단히 하기 위하여 법선 방향의 플럭스를 $\mathbf{F}_{\mathbf{n}}^k$ 로 나타내고 면의 좌측과 우측을 각각 아래첨자 L과 R로 나타내면, MUSCL 내삽[36]에 의한 수치적 플럭스는 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{\Gamma}}_m^{-1}\mathbf{F}_{\mathbf{n}}^k = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{\Gamma}}_m^{-1}\left(\mathbf{F}_{\mathbf{n}L} + \mathbf{F}_{\mathbf{n}R}\right) - \frac{1}{2}\left(\bar{\mathbf{\Gamma}}_m^{-1}\frac{\partial \mathbf{F}_{\mathbf{n}}}{\partial \mathbf{Q}_p}\right)^{+}\delta\mathbf{Q}_p + \frac{1}{2}\left(\bar{\mathbf{\Gamma}}_m^{-1}\frac{\partial \mathbf{F}_{\mathbf{n}}}{\partial \mathbf{Q}_p}\right)^{-}\delta\mathbf{Q}_p \tag{3.7}$$

여기서 $\delta\mathbf{Q}_p$ 는 L과 R 변수를 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$\delta\mathbf{Q}_p = \mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L \tag{3.8}$$

플럭스 벡터를 계산하는 목적은 식 (3.6)을 연산하기 위함이므로, 양과 음의 고유치는 행렬 $\bar{\mathbf{\Gamma}}_m^{-1}$ 를 포함하여야 한다. 고유벡터 $\mathbf{M}_p^{-1}$ 와 $\mathbf{M}_p$ 를 정의함으로써 자코비안과 $\bar{\mathbf{\Gamma}}_m^{-1}$ 의 곱을 식 (3.9)와 같이 대각화할 수 있으며, 고유치를 양과 음의 부분으로 분할하면 식 (3.10)와 같이 양과 음의 자코비안을 각각 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M}_p^{-1}\left(\mathbf{\Gamma}_m^{-1}\mathbf{F}_{\mathbf{n}}^k\right)\mathbf{M}_p = \mathbf{\Lambda} \tag{3.9}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^{+} + \mathbf{\Lambda}^{-} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \left(\mathbf{\Gamma}_m^{-1}\mathbf{F}_n^k\right)^{+} = \mathbf{M}_p \mathbf{\Lambda}^{+} \mathbf{M}_p^{-1} \\ \left(\mathbf{\Gamma}_m^{-1}\mathbf{F}_n^k\right)^{-} = \mathbf{M}_p \mathbf{\Lambda}^{-} \mathbf{M}_p^{-1} \end{cases} \tag{3.10}$$

또한 플럭스 벡터의 크기를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\left|\mathbf{\Gamma}_m^{-1}\mathbf{F}_{\mathbf{n}}^k\right| = \left(\mathbf{\Gamma}_m^{-1}\mathbf{F}_{\mathbf{n}}^k\right)^{+} - \left(\mathbf{\Gamma}_m^{-1}\mathbf{F}_{\mathbf{n}}^k\right)^{-} \tag{3.11}$$

위 과정을 통하여 수치적 플럭스를 표준적인 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{\Gamma}}_m^{-1}\mathbf{F}_{\mathbf{n}}^k = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{\Gamma}}_m^{-1}\left(\mathbf{F}_{\mathbf{n}L} + \mathbf{F}_{\mathbf{n}R}\right) - \frac{1}{2}\left|\bar{\mathbf{\Gamma}}_m^{-1}\frac{\partial \mathbf{F}_{\mathbf{n}}}{\partial \mathbf{Q}_p}\right|\delta\mathbf{Q}_p \tag{3.12}$$

식 (3.6)에 예조건화 방정식을 곱하고 연산을 위해 유도한 플럭스 벡터를 적용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{\Gamma}}_m\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}_p}{\partial \tau}\right)_m \Omega + \sum_{k=1}^{K}\mathbf{F}_{\mathbf{n}}^k = 0 \tag{3.13}$$

$$\text{where} \quad \mathbf{F}_{\mathbf{n}}^k = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}_{\mathbf{n}L} + \mathbf{F}_{\mathbf{n}R}\right) - \frac{1}{2}\bar{\mathbf{\Gamma}}_m\left|\bar{\mathbf{\Gamma}}_m^{-1}\frac{\partial \mathbf{F}_{\mathbf{n}}}{\partial \mathbf{Q}_p}\right|\delta\mathbf{Q}_p \tag{3.14}$$

따라서 제어체적에 대한 지배방정식은 최종적으로 다음의 형태로 정리된다.

$$\bar{\mathbf{\Gamma}}_m\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}_p}{\partial \tau}\right)_m \Omega + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}\left\{\left(\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R\right) - \mathbf{\Gamma}_m\left|\mathbf{\Gamma}_m^{-1}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}_p}\right|\delta\mathbf{Q}_p\right\}\cdot\mathbf{n}_k = 0 \tag{3.15}$$

3.2 비정렬격자계에서의 변화량 구성

유한체적법은 각각의 제어체적에 대한 체적 평균 값을 해로 판별하며, 좌측과 우측의 체적 평균 값을 이용하여 이산화하면 1차 상류차분법이 된다. 1차 상류차분법은 수치적 확산으로 인하여 해가 부정확해지기 때문에 정확도를 높이기 위한 방법으로 변화량 구성(gradient construction) 방법을 사용한다.

정렬격자계에서는 테일러 급수를 1개의 변수에 대하여서 전개하였으나, 비정렬격자계에서는 특정한 방향으로 격자가 분포하지 않는다. 따라서 비정렬격자계에 변화량 구성을 적용하기 위하여, 점 k 에 대한 테일러 급수를 3차원에 대해 전개하면 다음과 같다.

$$
\begin{gathered}
Q(x) = Q_k + \Delta\mathbf{r}^T \left(\nabla Q\right)_k + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{r}^T H_k \Delta\mathbf{r} + \cdots \\
\text{where} \begin{Bmatrix} \nabla Q = Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_k = x_k\mathbf{i} + y_k\mathbf{j} + z_k\mathbf{k} \\ \Delta\mathbf{r}_k = \left(x - x_k\right)\mathbf{i} + \left(y - y_k\right)\mathbf{j} + \left(z - z_k\right)\mathbf{k} \end{Bmatrix}, H = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{3.16}
$$

여기서 x, y, z 로 나타나는 아래첨자는 각각에 대한 편미분을 의미한다. 비정렬격자계에서는 식 (3.16)에 나타난 변화량 $\left(\nabla Q\right)_k$ 와 Hessian H 를 계산하기 위하여 Green-Gauss 방법이나 최소자승법(least-square method) 등을 사용하여야 한다.

하지만 Green-Gauss 변화량 구성 방법은 체적의 모양이 정확도에 영향을 미치며, 코드의 강건성(robustness)을 나쁘게 만드는 요인이 되기도 한다. 반면 최소자승 변화량 구성(least-square gradient construction)은 격자 형상과 무관하므로 격자 형상이 나쁜 경우에 다른 방법에 비하여 더 정확한 결과를 도출하며 점성 유동에서 더 강건하다[37]. 따라서 본 연구에서는 GEMS 코드에서 구현된 최소자승법을 변화량 구성 기법으로 선택하였다.

3.2.1 최소자승 변화량 구성

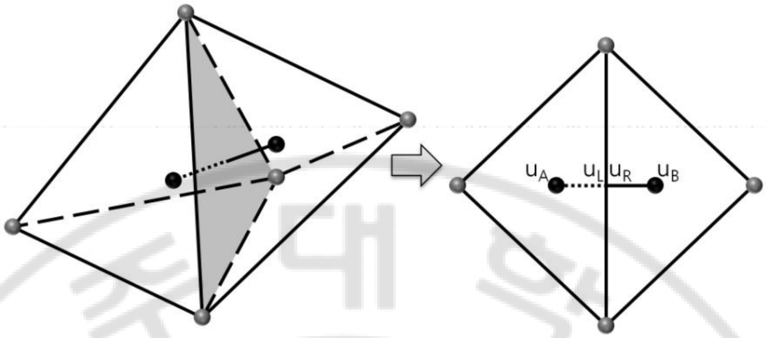

Fig. 4 flux evaluation at control volume interface

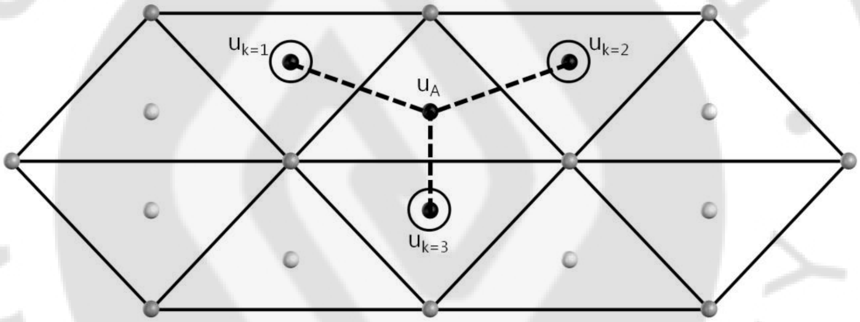

Fig. 5 stencil for least-square gradient calculation for cell-centered discretization

Fig. 4의 제어체적 경계에서 2차 정확도를 가지는 플럭스 값을 얻으려면 경계의 좌우측 체적 중심에서 구성된 변화량 값을 통해 식 (3.17)과 같이 외삽(extrapolate) 하여야 한다.

$$
\begin{aligned}
u_L &= u_A + \nabla u_A \cdot \mathbf{r}_{Af} \\
u_R &= u_B + \nabla u_B \cdot \mathbf{r}_{Bf}
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

체적 중심의 이산화 방법을 사용할 경우, 최소자승법을 이용한 변화량의 추정은 Fig. 5와 같이 현재 체적의 중심 및 이웃한 체적 중심에서의 값을 통하여 구하며, 이

때 이웃한 체적의 중심점을 현재 체적의 중심점에 대한 stencil이라 한다. 최소자승 변화량 구성은 이웃한 값과의 차이의 제곱의 합을 최소화시키는 변화량 값을 계산하는 방법으로 구하며, 최소화시키는 식은 식 (3.18)과 같다. 여기서 차이 값 E_{Ak} 는 식 (3.19)와 같으며, w 는 가중치(weighting factor)를 나타낸다.

$$\sum_{k=1}^{NC} w_{Ak}^2 E_{Ak}^2 \tag{3.18}$$

$$E_{Ak}^2 = \left(-\left(u_k - u_A\right) + \left(u_x\right)_A dx_{Ak} + \left(u_y\right)_A dy_{Ak} + \left(u_z\right)_A dz_{Ak}\right)^2 \tag{3.19}$$

위에서 나타난 $\left(u_x\right)_A$, $\left(u_y\right)_A$, $\left(u_z\right)_A$ 의 변화량들을 구하기 위하여 다음의 3개의 방정식 시스템으로 구성된 최소화 문제를 풀 수 있으며, 실질적인 수치 해법은 특이값 분해(SVD: singular value decomposition) 기법을 사용하였다.

$$\frac{\partial \sum_{k=1}^{NC} w_{Ak}^2 E_{Ak}^2}{\partial \left(u_x\right)_A} = 0, \quad \frac{\partial \sum_{k=1}^{NC} w_{Ak}^2 E_{Ak}^2}{\partial \left(u_y\right)_A} = 0, \quad \frac{\partial \sum_{k=1}^{NC} w_{Ak}^2 E_{Ak}^2}{\partial \left(u_z\right)_A} = 0 \tag{3.20}$$

여기서 가중치를 사용하지 않기 위하여 가중치 값을 동일하게 고정하더라도 해의 변화는 미미하지만, 최소자승을 계산하기 위한 시스템에서 불량 조건이 나타날 수 있는 원인이 된다[37]. 따라서 가중치 값은 식 (3.21)와 같이 거리의 역수 값을 사용하였다.

$$w_{Ak} = \frac{1}{\sqrt{dx_{Ak}^2 + dy_{Ak}^2 + dz_{Ak}^2}} \tag{3.21}$$

3.3 비정렬격자계에 대한 근사 내재적 해법

유한체적에 적용된 지배방정식인 식 (3.15)의 가상 시간 항에 내재적 Euler 방법을 적용하면 종속 변수에 대한 비선형적인 시스템이 만들어진다. 이산화를 한 후 시간항에 대하여 선형화를 하고 델타 형식(delta form)으로 만들어서 계산 가능한 식을 구성하며, 이 때 1차 정확도를 표현하는 항에 대해서만 좌변에 위치시키고 고차 정확도를 표현하는 항은 우변으로 위치시켜서 식 (3.22)와 같은 불일치 선형 근사화(inconsistent linear approximation)를 수행하였다[10].

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_m\Omega_m}{\Delta\tau}+\sum_{k=1}^{K}\left\{\frac{\partial\mathbf{F}_m}{\partial\mathbf{Q}_p}+\left|\frac{\partial\mathbf{F}_m}{\partial\mathbf{Q}_p}\boldsymbol{\Gamma}_m^{-1}\right|\boldsymbol{\Gamma}_m\right\}\cdot\mathbf{n}_k\right]\Delta\mathbf{Q}_{pm}\\&\quad+\sum_{k=1}^{K}\left\{\frac{\partial\mathbf{F}_k}{\partial\mathbf{Q}_p}-\left|\frac{\partial\mathbf{F}_k}{\partial\mathbf{Q}_p}\boldsymbol{\Gamma}_k^{-1}\right|\boldsymbol{\Gamma}_k\right\}\cdot\mathbf{n}_k\Delta\mathbf{Q}_{pk}=-\sum_{k=1}^{K}\mathbf{F}_k^n\cdot\mathbf{n}_k\end{aligned}\tag{3.22}$$

여기서 $\Delta\mathbf{Q}_p$ 는 시간에 따른 변화량으로 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta\mathbf{Q}_p\equiv\mathbf{Q}_p^{n+1}-\mathbf{Q}_p^n\tag{3.23}$$

식 (3.22)을 계산 도메인에 적용하여 얻은 시스템은 큰 희소 행렬(large sparse matrix)을 구성한다. 좌변에 플럭스의 1차 정확도 항만 유지시킴으로써 특정 열의 0이 아닌 요소의 개수는 그 열에 해당하는 체적을 구성하는 면의 개수와 동일하다. 띠 행렬(band matrix)의 형태로 나타나는 정렬격자계의 경우와는 달리 비정렬격자계의 경우에는 행렬 내 0이 아닌 요소가 임의의 위치에 분포한다. 따라서 비정렬격자계를 해석하는 근사 해법은 임의의 큰 희소 행렬을 처리할 수 있어야 하며, 본 연구에서는 GEMS 코드에 구현된 다양한 수치 기법 중 point Gauss-Seidel 방법과 수정 line Gauss-Seidel 방법을 선정하였다.

3.3.1 Point Gauss-Seidel (PGS) 방법

정렬격자계에서 사용되는 point Gauss-Seidel 방법은 비정렬격자계에 대하여서도 동일하게 사용될 수 있다. 행렬의 모든 열에 대하여 순차적으로 탐색하며 행을 전진하면 전체 행렬에 대한 새로운 시간 스텝에서의 값을 얻을 수 있다.

Point Gauss-Seidel 방법에서 좌변의 행렬은 현재 체적에 대한 계수를 의미하는 대각 행렬(diagonal matrix) D, 아직까지 계산이 완료되지 않은 체적의 계수를 의미하는 엄밀한 상 삼각 행렬(strictly upper matrix) U, 그리고 이미 계산이 완료된 체적의 계수를 의미하는 하 삼각 행렬(strictly lower matrix) L로 분해하여 식 (3.24)와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 $\mathbf{R}$은 식의 우변을 의미하며, 이러한 방법으로 선형 시스템은 식 (3.25)의 반복 해법에 의해 해석된다.

$$\left(D+L+U\right)\Delta\mathbf{Q}_p=\mathbf{R} \tag{3.24}$$

$$\left(D+L\right)\Delta\mathbf{Q}_p^{k+1}=\mathbf{R}-U\Delta\mathbf{Q}_p^{k} \tag{3.25}$$

3.3.2 비정렬격자계 적용을 위한 수정 Line Gauss-Seidel (LGS) 방법

Line Gauss-Seidel은 선형 시스템을 풀 때 격자의 연결 구조를 기반으로 정의되는 일련의 line에 대하여 내재적 기법으로 해석하는 방법이다. Point Gauss-Seidel 방법은 계수 행렬을 D-L-U로 분할하였을 때 U에 해당하는 행렬에 대하여 이전 시간 값을 사용함으로써 외재적인 성격을 띠는 반면, line Gauss-Seidel 방법은 일련의 line을 구성하는 격자에 대하여 D 뿐만 아니라 L이나 U 중 line의 요소로 포함된 셀의 계수 항에 대하여 현재 시간 값을 사용함으로써 풀이 방법에 있어서 전반적으로 내재적인 성격을 띤다. 게다가 기존의 정렬격자계는 격자의 index에 대한 방향으로의 격자 요소의 개수가 동일하며 2차원의 경우 사각형, 3차원의 경우 육면체 등 균일한

형상과 연결구조를 가지고 있으므로, line을 구성하기 위하여 특정 방향에 대하여 같은 index 값을 가지는 격자를 선택하는 방법으로 쉽게 구성할 수 있었다. 또한 정렬격자계에서 line Gauss-Seidel 방법은 point Gauss-Seidel 방법에 비해 높은 안정성을 가지며, 이방성 격자 등에서 더욱 효과적이므로 일반적으로 선호되고 있었다.

하지만 임의의 격자 연결구조를 가지는 비정렬격자계에 이를 적용하기 위하여서는 정렬격자계와 같이 index를 이용한 line 구성 방법을 사용할 수 없다. 따라서 메모리에 저장된 line의 경로를 따라 내재적 기법을 적용하여 선형 방정식의 해를 구하는 알고리즘, 그리고 line을 구성하기 위하여 격자를 탐색하는 기법에 대하여 일련의 추가 및 수정을 거친 후 line Gauss-Seidel을 적용할 수 있었다. 여기서 격자 별 연관성을 기준으로 재정렬하여 line을 구성하는 방법으로 Sharov and Nakahashi[11] 방법을 사용하였다.

비정렬격자계에 line Gauss-Seidel을 적용하기 위해 Fig. 6를 이용하여 다음에 설명한 방법을 통하여 탐색을 수행하였다. 여기에서는 x 방향의 탐색법만 명시하였으나 실제로는 동일한 방법의 x, y, z의 세 방향으로의 탐색이 필요하다.

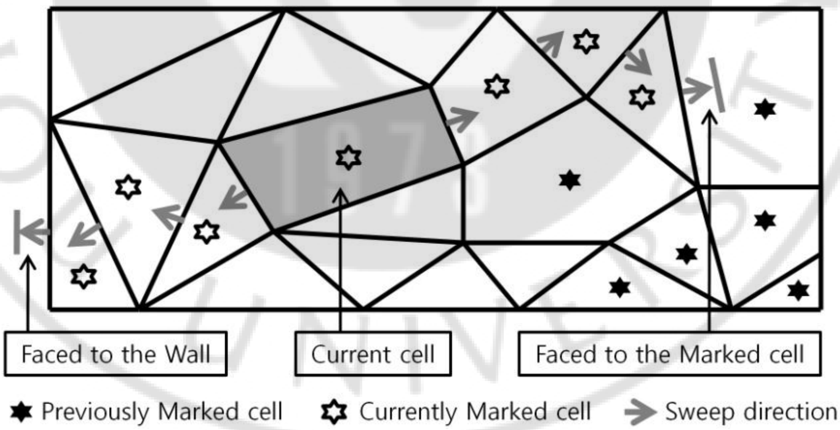

Fig. 6 sweep route in unstructured grid

x 방향 탐색법:

1. 기준 격자 선택 및 표기
   A. 탐색되지 않은 영역에서 가장 작은 y 좌표를 가지는 격자를 선택한다.
   B. 선택된 격자의 모든 면에서의 단위 법선 벡터들 중 x 방향의 요소가 가장 작은 면과 가장 큰 면을 $f_{\min}$ 과 $f_{\max}$ 에 저장한다.
   C. 선택된 격자에 탐색됨을 표기하고 이 격자를 둘러싼 모든 면에 표기한다.
2. 전방 탐색
   A. 현재 격자에서 $f_{\max}$ 가 가리키는 곳의 이웃 격자를 탐색한다.
   B. 탐색된 격자에서 다시 $f_{\max}$ 를 찾아 탐색하는 것을 반복한다. 매번 탐색이 진행될 때마다 격자에 탐색됨을 표기하고 이 격자를 둘러싼 모든 면에 표기한다.
   C. 벽면 경계나 이미 탐색된 것으로 표기된 면을 만나면 탐색을 중지하고 처음 선택된 격자로 복귀한다.
3. 후방 탐색
   A. 현재 격자에서 $f_{\min}$ 이 가리키는 곳의 이웃 격자를 탐색한다.
   B. 전방 탐색과 마찬가지로 반복 탐색을 수행하며, 종료 조건도 동일하다.
4. 계산영역 내 모든 격자가 탐색될 때까지 앞서 설명한 1, 2, 그리고 3번의 모든 절차를 반복한다.

Line Gauss-Seidel 계산을 위하여 탐색을 거치면서 탐색 경로를 저장하여야 한다. 이는 다음의 데이터 구조체[10]에 의해 저장되며, 단지 포인터를 통해 연결 정보만을 구성하므로 메모리 소모가 적다.

```
type chain {
    type(chain), pointer :: upper_chain   ! pointer to upper chain
    type(chain), pointer :: next_chain    ! pointer to next chain
    type(cell),  pointer :: current_cell  ! pointer to current cell
    type(face),  pointer :: nvmin_face    ! pointer to face w. min. normal vector
}
```

탐색이 완료되고 나면 정렬격자계에서 사용한 것과 유사한 방법으로 비정렬격자계에 대한 line Gauss-Seidel 방법을 정의할 수 있다. 이산화된 방정식을 대각행렬 D, 동일 선상의 체적에 대한 행렬 D_x^+ 와 D_x^-, 그리고 y 방향 탐색을 통해 얻어진 선 바깥쪽의 요소에 대한 행렬 D_y^+, D_y^- 로 나눈 다음, line Gauss-Seidel 해법을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\left(D+D_x^+ +D_x^- +D_y^+ +D_y^-\right)\Delta\mathbf{Q}_p=\mathbf{R} \tag{3.26}$$

여기서 x 탐색에 대한 식을 y 탐색 순서 조합에 대하여 전방 및 후방 탐색 식으로 분해하면 다음과 같다.

$$\left(D+D_x^+ +D_x^- +D_y^+\right)D^{-1}\left(D+D_x^+ +D_x^- +D_y^-\right)\Delta\mathbf{Q}_p=\mathbf{R} \tag{3.27}$$

여기서 D_x^+, D_x^- 는 전, 후방 탐색을 진행중인 열에 대한 항이며, D_y^+, D_y^- 는 이웃한 열에 대한 항이다. y 방향에 대하여서도 동일한 방법으로 식을 얻을 수 있다. 일반적으로 2차원에서는 4방향, 3차원에서는 6방향의 탐색 과정이 필요하며, 이 방법을 정렬격자계에 적용할 경우 표준 line Gauss-Seidel과 동일하다[10].

4. 계산결과 및 검토

4.1 평판 위 층류 경계층 유동 해석

본 연구에서는 시간전진법을 기반으로 하는 Navier-Stokes 방정식 해석 코드에 비압축성의 저 마하수 유동을 해석할 수 있도록 해석 영역을 확장하는 예조건화 기법을 도입한 GEMS 코드를 이용하여 수치해석을 수행하였다. 따라서 이러한 코드의 특성을 파악하기 위하여 점성 층류 유동 및 저 마하수 유동이 복합적으로 나타나는 평판 위 층류 경계층 유동(flat plate laminar boundary layer flow) 문제를 통하여 예조건화 Navier-Stokes 방정식의 해석을 수행하였다.

비압축성으로 가정할 수 있는 마하 0.001의 평판과 평행한 유동을 가정하였으며, 평판의 경계조건으로는 점착조건(no-slip condition)을 사용하였다. 얇은 평판의 전연(leading edge)으로부터 상류에는 0.25ft 길이의 비점성 유동 공간을 두어 평판 전연에서 발생하는 유동을 해석하도록 하였으며, 유동이 1ft의 평판을 지나는 동안 경계층이 발달하도록 한 후 평판의 끝 지점에서의 값을 Blasius 해와 비교하였다.

해석에 사용된 수치 기법은 Table. 1에 나타내었으며, 계산을 위한 형상은 Fig. 7에 나타내었다. 예조건화 사용 유무에 따른 수렴도 곡선은 Fig. 8에 나타내었으며, 수치해석 결과는 Fig. 9과 Fig. 10, 그리고 Fig. 11에 나타내었다.

flux evaluation	HLL scheme[34]	equations to solve	2D N-S equation
discretization	2nd order upwind	number of cells	10,000
linear solver	point Gauss-Seidel	grid type	2D quadrilateral
gradient evaluation	least-square	fluid property	air (perfect gas)

Table. 1 conditions of the computation of flat plate laminar boundary layer flow

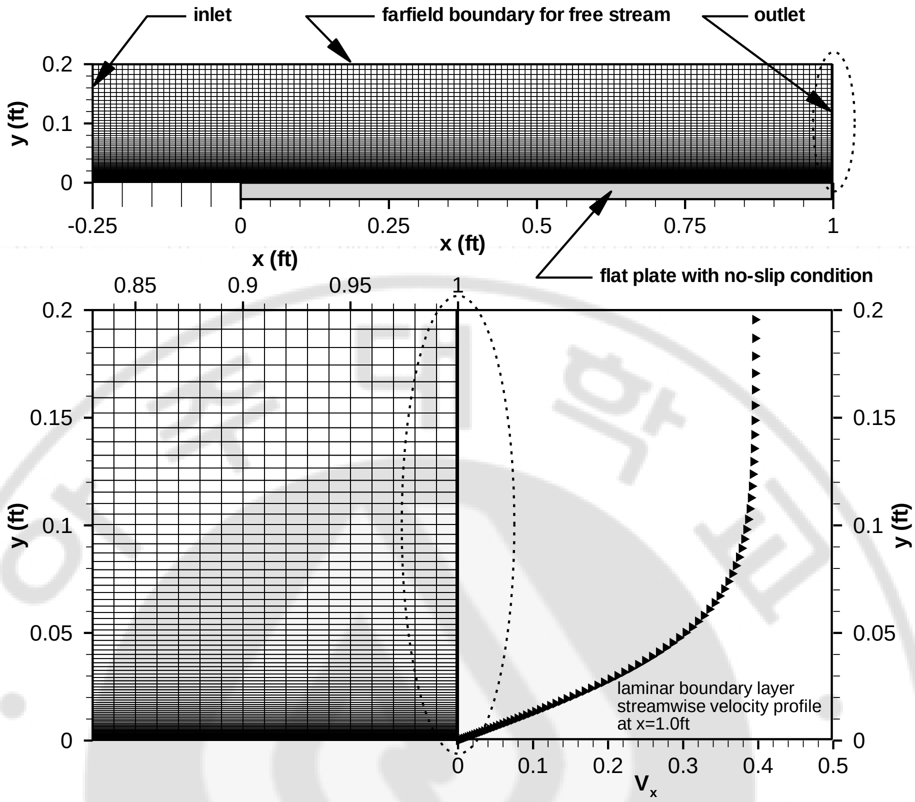

Fig. 7 geometry, grid, and boundary type of flat plate laminar boundary layer flow

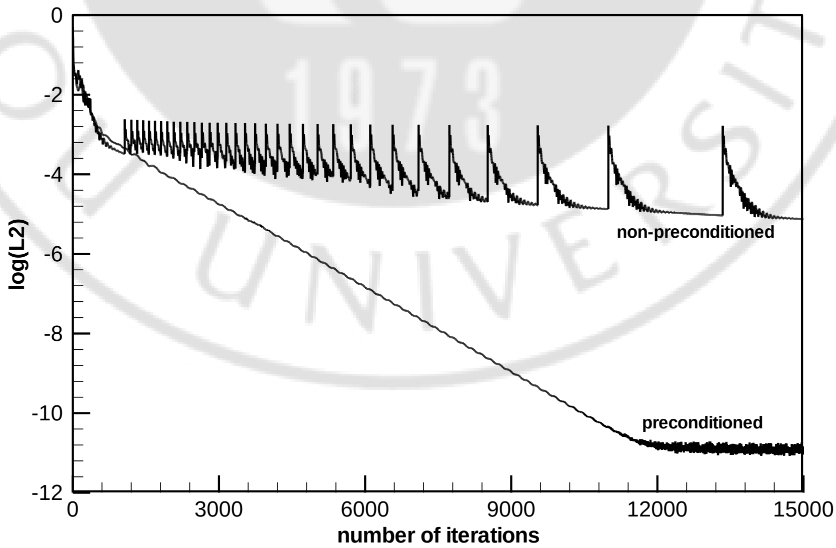

Fig. 8 convergence comparison between preconditioned and non-preconditioned solution for flat plate laminar boundary layer flow

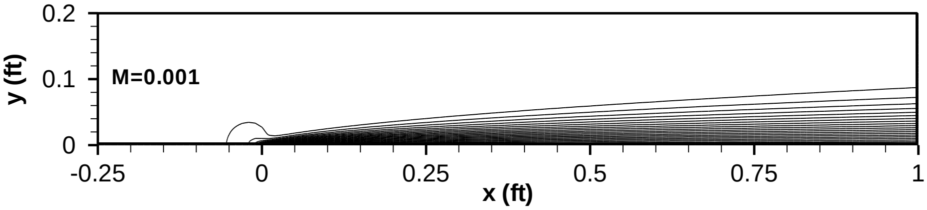

Fig. 9 mach contour of flat plate laminar boundary layer flow

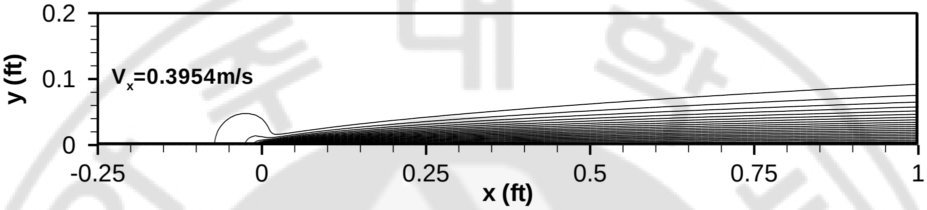

Fig. 10 x−velocity contour of flat plate laminar boundary layer flow

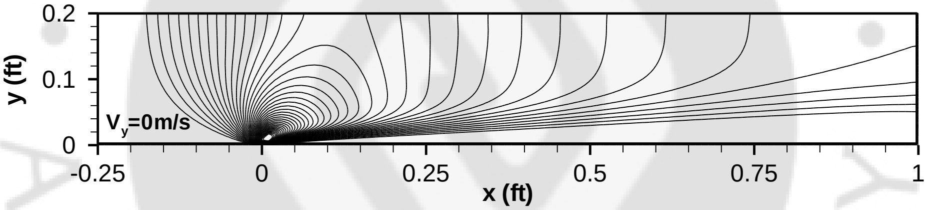

Fig. 11 y−velocity contour of flat plate laminar boundary layer flow

위의 계산 결과를 Blasius 방정식의 결과와 비교하기 위하여 Blasius 방정식을 유도하였다. 운동량 수송에 관련한 Blasius 방정식의 유도 과정은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad , \quad u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad , \quad \begin{cases} \text{at } y=0,\, u=v=0 \\ \text{at } y=\infty,\, u=U_\infty \end{cases} \tag{4.1}$$

식 (4.1)의 운동량 방정식은 식 (4.2)에서와 같이 x와 y 변수를 η로 변환하고, 종속변수를 유동 함수(stream function) ψ로 치환한 다음, η에 대한 함수인 $f(\eta)$로 변환하여 식 (4.3)의 Blasius 방정식을 얻을 수 있다.

$$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad , \quad f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\nu x U_\infty}} \tag{4.2}$$

$$ff'' + 2f''' = 0 \quad , \quad \begin{cases} \text{at } \eta = 0, f = f' = 0 \\ \text{at } \eta = \infty, f' = 1 \end{cases} \tag{4.3}$$

평판의 시작점으로부터 1ft 지점에서의 높이에 따른 유동 방향 속도 그래프는 Fig. 12과 같다. 여기서 높이는 상사 변수인 η로 나타내었으며, 속도 값은 자유 유동의 속도로 정규화(normalize)하여서 나타내었다. 자유 유동 속도의 99%를 초과하는 지점은 Blasius 해 및 해석 해 모두 약 $\eta = 8$이므로 $\eta = 8$까지 영역에 대하여 속도 그래프를 표현하였으며, 비교적 잘 일치하는 것을 확인하였다.

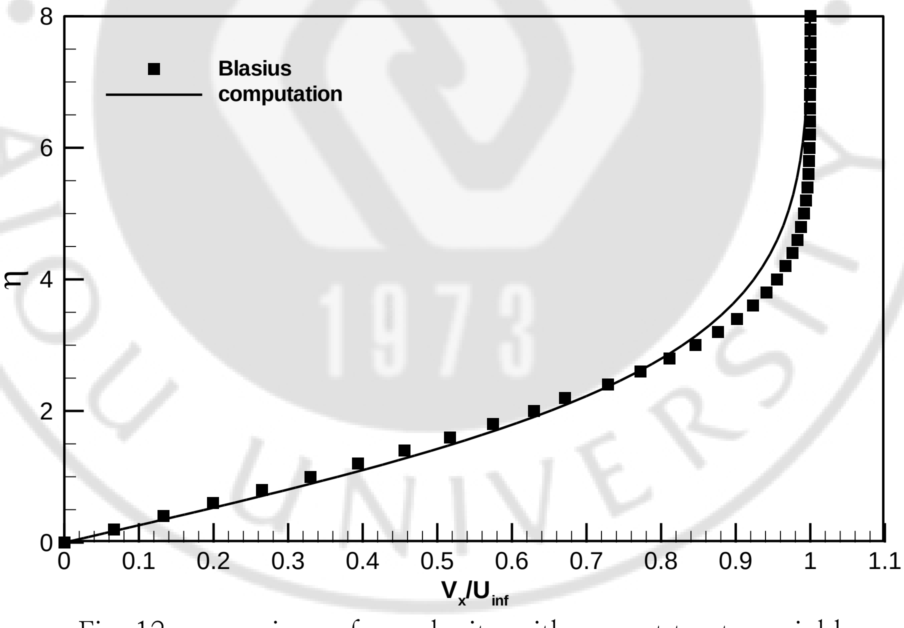

Fig. 12 comparison of x-velocity with respect to eta variable between Blasius solution and computation results

4.2 Suddhoo-Hall 4요소 에어포일 유동 해석

Suddhoo-Hall 4요소 에어포일(4 elements airfoil)은 2차원 공간상에 배치된 4개의 원을 Karman-Trefftz 연결 함수를 통해 Fig. 13과 같이 에어포일의 형태로 공형변환(conformal transform)한 형상이며, Suddhoo and Hall[38]은 이러한 변환 방법을 통하여 포텐셜 유동에 대한 4요소 에어포일 표면 압력계수의 엄밀 해를 계산하였다.

본 연구에서는 Suddhoo-Hall 4요소 에어포일에 대한 비점성 저 마하수에 대한 예조건화 해석을 수행하고 그 결과를 Suddhoo and Hall의 결과와 비교하였다. 또한 동일한 문제에 대하여 line Gauss-Seidel(LGS) 및 point Gauss-Seidel(PGS) 기법을 이용하여 수렴성 및 계산 시간을 비교하였으며, 결과적으로 LGS 기법은 PGS 기법에 비해 수렴성이 좋으며, 격자의 탐색으로 인해 1회 계산에 필요한 계산 시간은 더 많이 소요되나, 수치 기법의 안정성이 뛰어나므로 실질적인 문제에서는 CFL 값을 높이는 방법을 통해 빠른 해석이 가능함을 확인하였다. 해석에 사용된 조건 및 수치 기법은 Table. 2에 나타내었으며, 에어포일의 형상은 Fig. 14에 나타내었다.

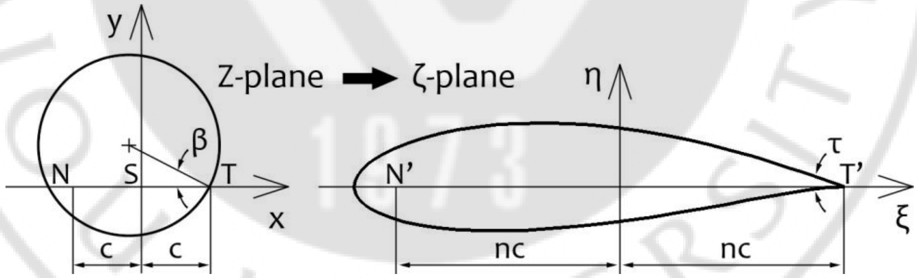

Fig. 13 conformal transformed airfoil by Karman-Trefftz function

flux evaluation	HLL scheme[34]	equations to solve	2D Euler equation
discretization	2nd order upwind	number of cells	115,636
linear solver	1.LGS / 2.PGS	grid type	2D triangular
gradient evaluation	least-square	fluid property	air (perfect gas)

Table. 2 conditions of the computation of Suddhoo and Hall 4 elements airfoil

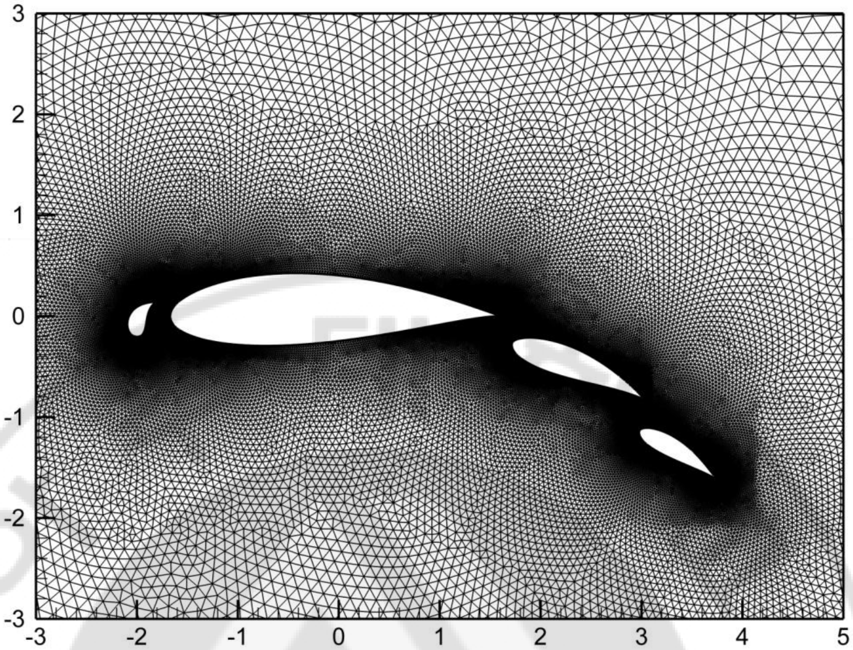

Fig. 14 geometry and grid of Suddhoo-Hall 4 elements airfoil

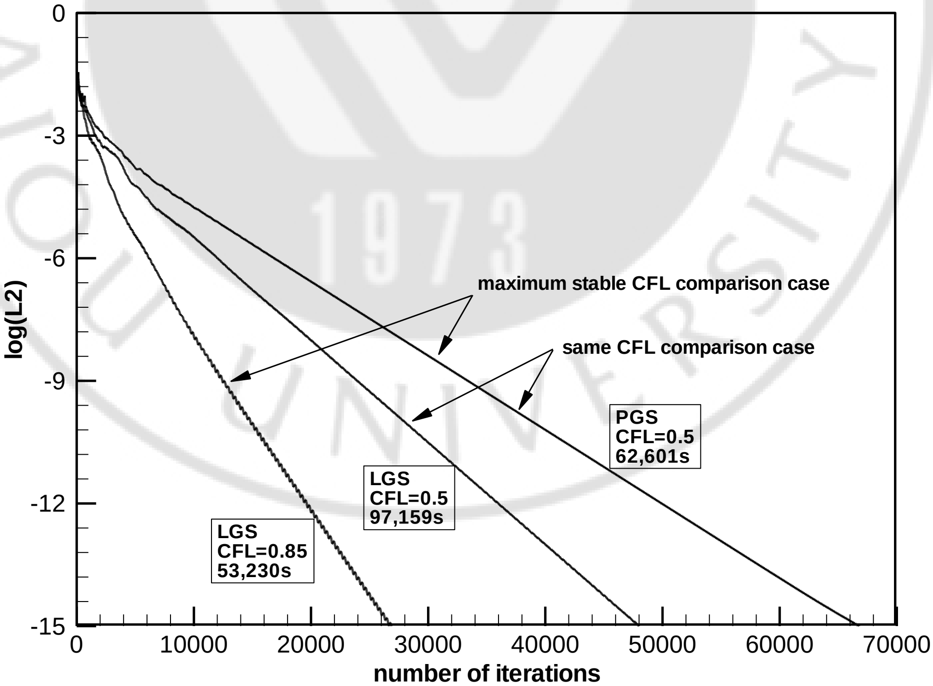

Fig. 15 convergence of Suddhoo-Hall 4 elements airfoil using PGS and LGS

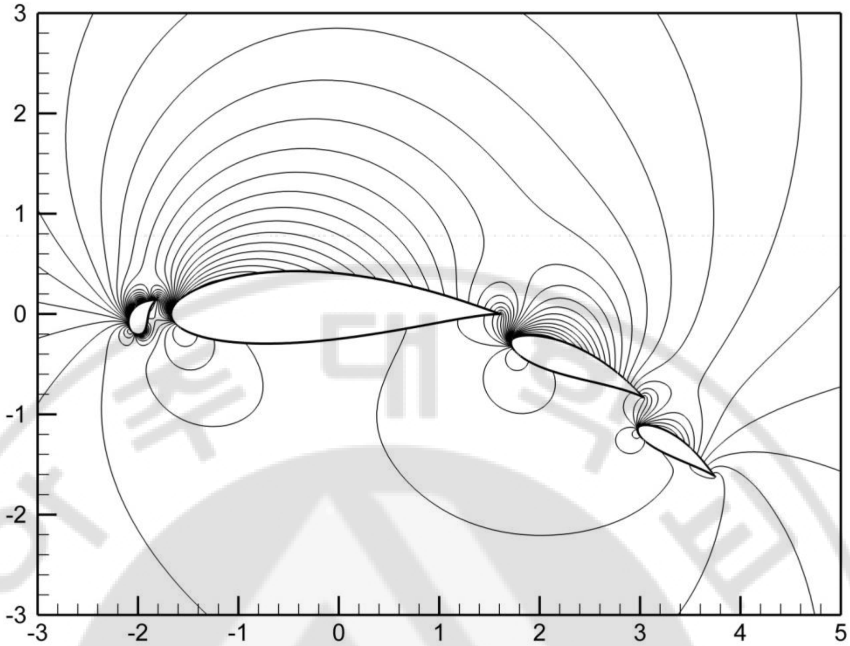

Fig. 16 pressure contour of Suddhoo-Hall 4 elements airfoil

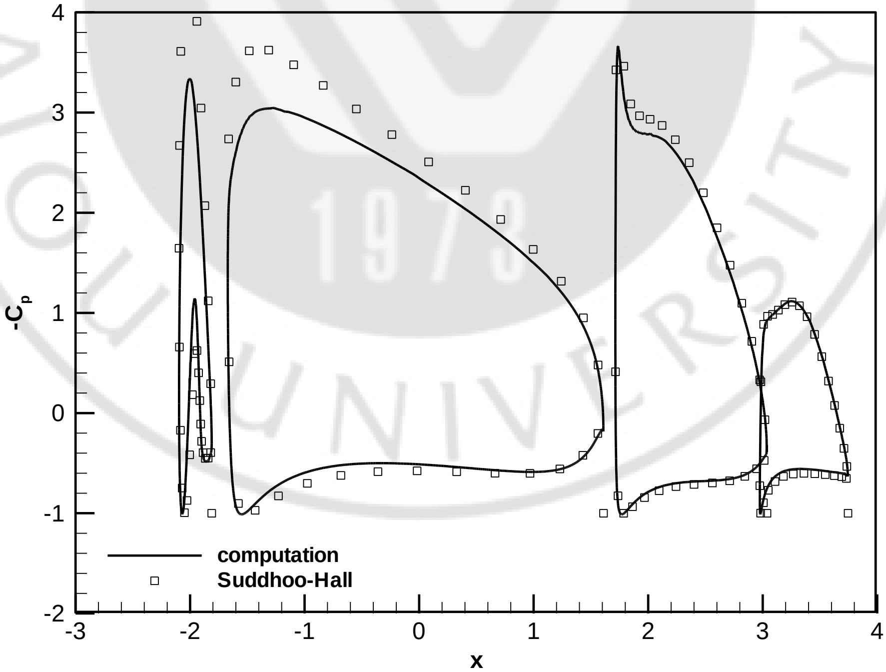

Fig. 17 pressure coefficient plot of Suddhoo-Hall 4 elements airfoil

4.3 RAE-2822 천음속 에어포일 유동 해석

RAE-2822 에어포일은 초임계익형(supercritical airfoil)으로, 천음속 영역에서의 충격파를 완화함과 동시에 충격파로 인한 항력 손실을 줄이기 위한 형상을 지닌다 [39]. RAE-2822 에어포일이 소개된 이후로 최근 30여 년 동안 천음속 영역에서 다양한 연구 자료가 축적되어 있으며, 현재 유동 해석 코드나 난류 모델을 검증하기 위한 자료로 널리 사용되고 있다.

본 연구에서는 RAE-2822 에어포일에 대한 비점성 및 층류 유동에 대한 해석을 수행하고, 천음속 난류 모델의 기존 연구 결과와 비교하여 유사성 및 차이점을 비교하였다. 해석에 사용된 조건 및 수치 기법은 Table. 3에 나타내었으며, 에어포일의 전체 형상은 Fig. 18과 Fig. 19에 나타내었다.

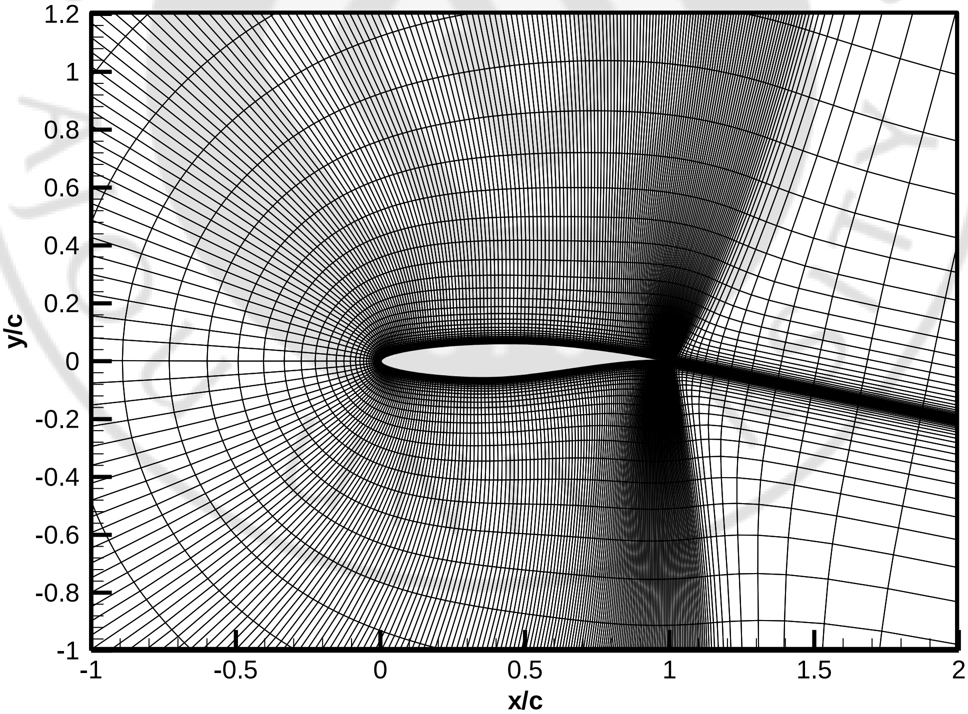

Fig. 18 geometry and grid of RAE-2822 airfoil

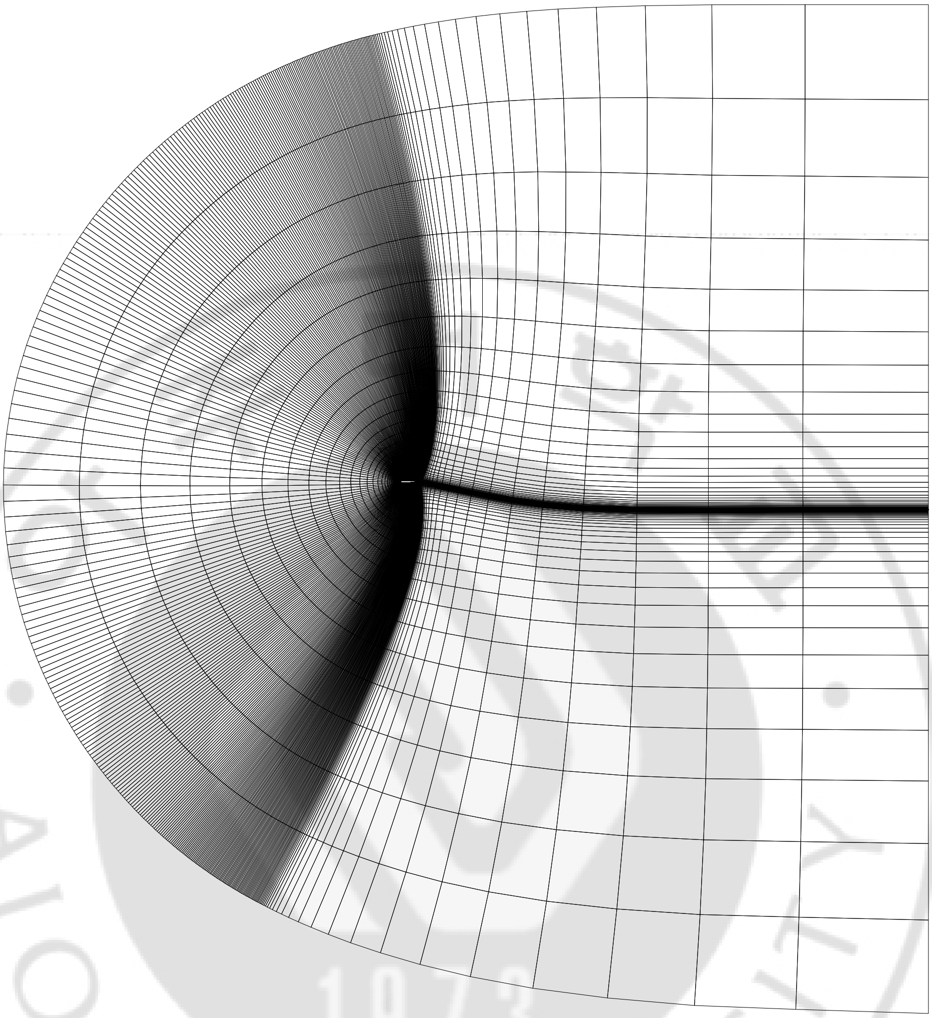

Fig. 19 computation domain of RAE-2822 airfoil

flux evaluation	HLL scheme	equations to solve	2D Euler equation
			2D N-S equation
discretization	2nd order upwind	number of cells	23,552
linear solver	line Gauss-Seidel	grid type	2D quadrilateral
gradient evaluation	least-square	fluid property	air (perfect gas)

Table. 3 conditions of the computation of RAE-2822 transonic airfoil

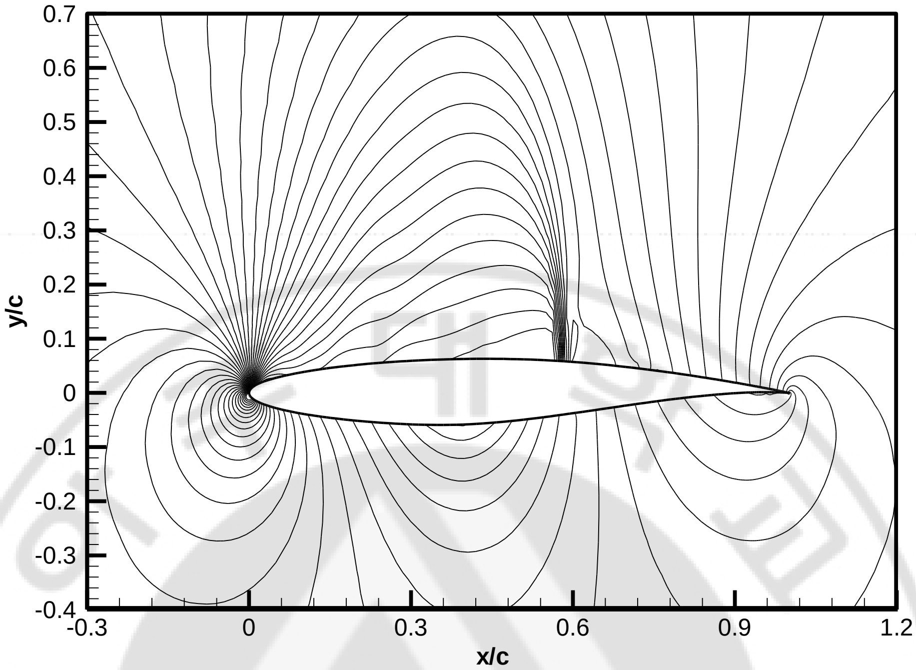

Fig. 20 pressure contour of RAE-2822 airfoil computation

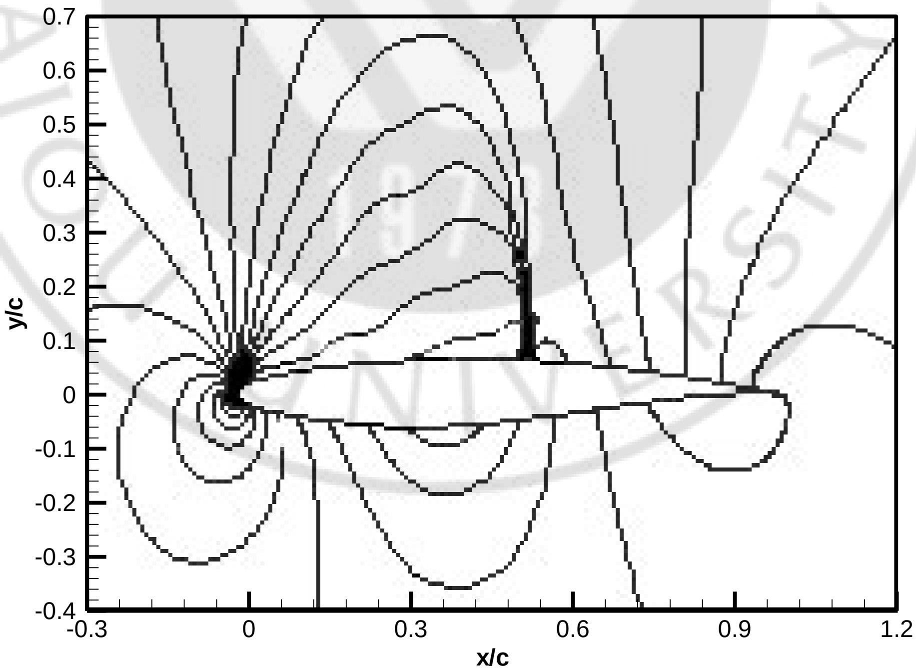

Fig. 21 pressure contour of RAE-2822 airfoil by Slater[40]

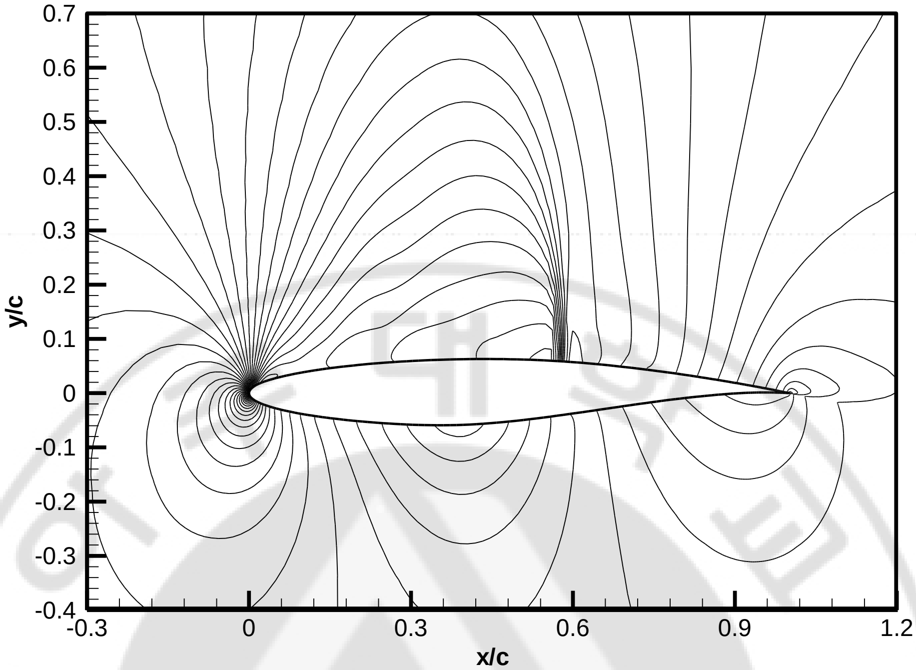

Fig. 22 mach contour of RAE-2822 airfoil computation

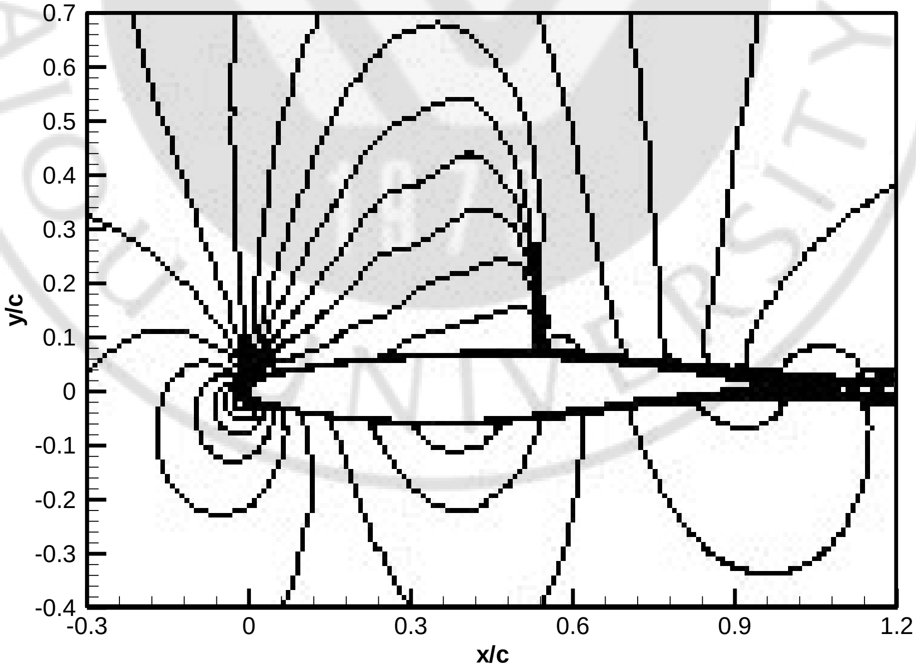

Fig. 23 mach contour of RAE-2822 airfoil by Slater[40]

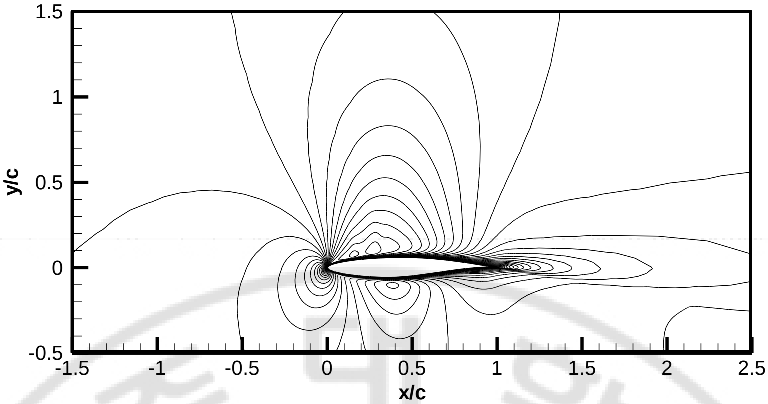

Fig. 24 mach contour of RAE-2822 airfoil using laminar N-S equation

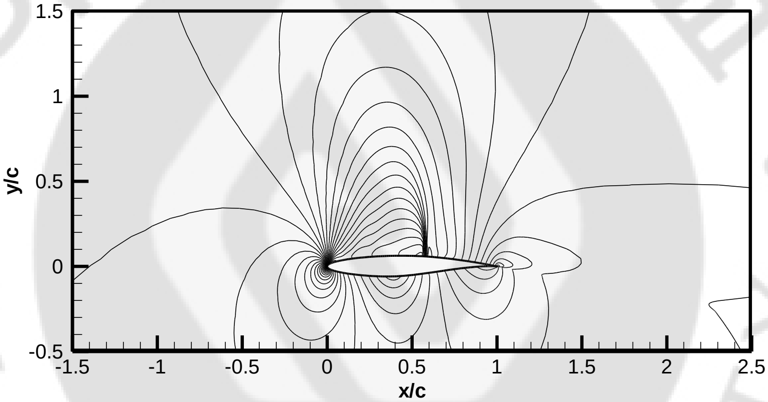

Fig. 25 mach contour of RAE-2822 airfoil using Euler equation

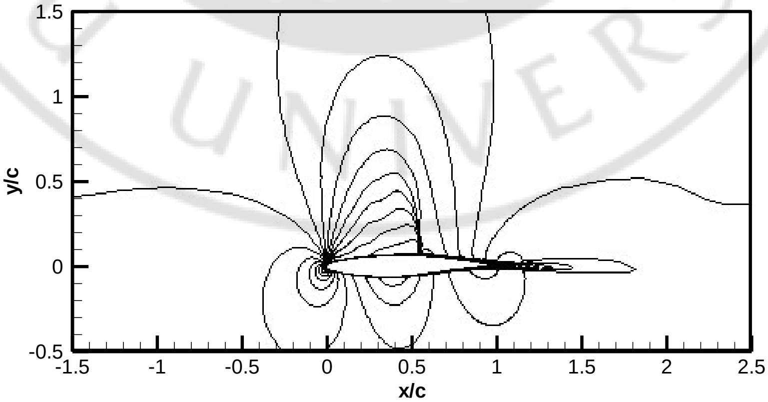

Fig. 26 mach contour of RAE-2822 airfoil using Spalart-Allmaras turbulent model

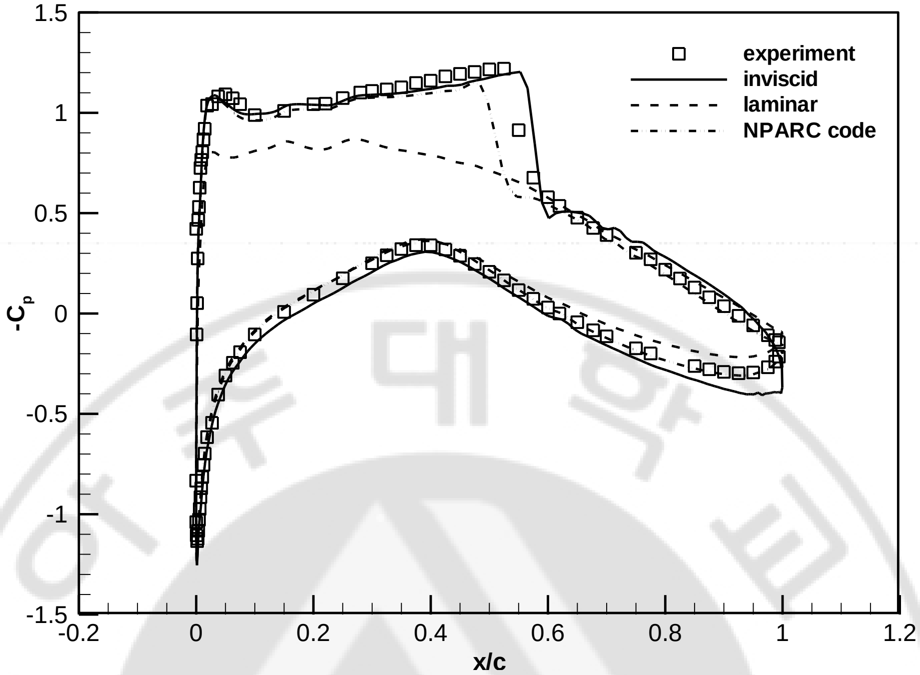

Fig. 27 pressure coefficient plot of RAE-2822 airfoil

천음속 영역은 Reynolds수가 비교적 높은 영역으로 층류(laminar) 현상의 영역을 벗어나는 영역이다. 따라서 점성의 영향이 비교적 적으며 비점성의 현상에 더욱 가깝다. 하지만 이 영역을 좀더 정확하게 모사하기 위해서는 난류 점성의 영향을 해석할 필요성이 있으며, Spalart-Allmaras 모델이나 $k-\omega$ 모델과 같은 난류 모델을 통하여 이를 비교적 정확하게 모사할 수 있다.

RAE-2822 에어포일에 대한 실험 값을 기준으로, 본 연구를 통해 해석한 비점성 및 층류 계산 결과와 함께 난류 모델을 이용한 NPARC 코드의 계산 결과를 압력계수 값으로 비교한 그래프를 Fig. 27에 나타내었다. 먼저 비점성 계산은 에어포일의 대부분의 영역에 대하여 정확한 결과를 보이나 후미 부분에서 실제보다 낮은 양력을 나타내었다. 층류 계산은 에어포일의 전면부에서 비현실적인 압력계수 값을 보이나 비점성 계산이 오차를 가지는 후면에서 오히려 정확한 결과를 가진다. 따라서 비점성과 층류 계산만으로 표현할 수 없는 높은 Reynolds수 유동에 대하여 정확한 계산을 수행하기 위하여 난류 모델의 사용이 요구됨을 알 수 있다.

4.4 단차를 가지는 풍동 충격파 해석

마하 3의 단차를 가지는 풍동(wind tunnel with a step)에서 발생하는 충격파 수치해석은 1968년 Emery[41]에 의해 처음 소개되었으며, 1984년에 Woodward and Colella[42]에 의해 더욱 정교한 해석이 수행된 후, 압축성 수치해석 코드의 검증 문제로 널리 사용되게 되었다.

본 연구에서는 단차를 가지는 풍동에서 발생하는 충격파 문제를 비정상적으로 해석함으로써 초음속 영역에 대한 GEMS 코드의 해석 능력 및 해의 정확성을 확인하였으며, 이중시간전진법을 통한 비정상 해석 능력도 확인할 수 있었다. 시간 진행에 따른 충격파의 모양과 반사 및 굴절 위치 등을 기존 연구와 비교하였으며, 충격파의 폭과 모양을 통하여 2차 정밀도의 상류 차분법에 의한 수치적 확산 억제력을 확인하였다.

본 문제에서는 초반에 비정상 유동이 나타나다가 12 단위 시간이 지난 후에 정상 상태가 형성된다. 하지만 많은 실험 및 수치해석 논문에서 4 단위 시간에서의 상태를 수치해석 검증용으로 다루고 있으므로, 본 연구에서도 4 단위 시간까지 한정하여 해석하였다. 해석에 사용된 조건 및 수치 기법은 Table. 4에 나타내었으며, 풍동의 전체 형상은 Fig. 28에 나타내었다.

flux evaluation	HLL scheme	gradient evaluation	least-square
discretization	2nd order upwind	equations to solve	2D Euler equation
linear solver	point Gauss-Seidel	number of cells	225,792
time advancement	2nd order implicit	grid type	2D triangular
max. time step size	1.0×10^{-5} sec	fluid property	air (perfect gas)

Table. 4 conditions of the computation of mach 3 wind tunnel with a step

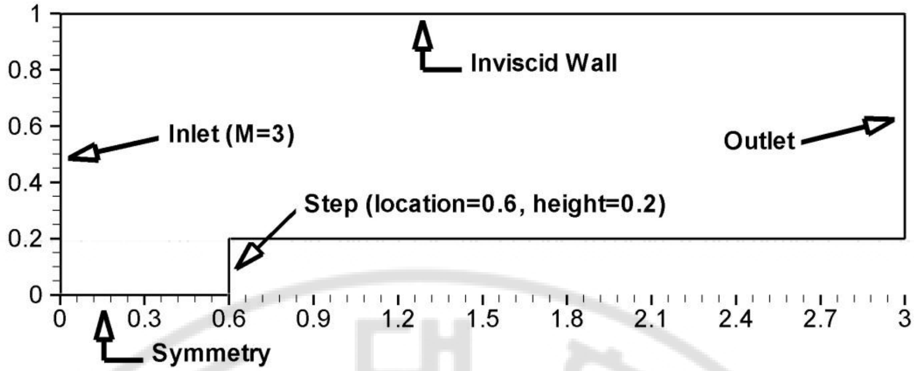

Fig. 28 geometry of mach 3 wind tunnel with a step

본 연구에서 수행된 해석 결과는 Woodward and Colella[42]의 해석 결과와 비교하였으며, 각 단위 시간 별 밀도 장(density field) 결과는 다음과 같다. 참고로 기존의 연구 결과에는 결과가 단위 시간 및 단위 크기에 대한 척도로 표기되어 있으며, 본 연구에서도 이를 따라 단위 시간 및 단위 크기를 이용하여 값을 표현하였다.

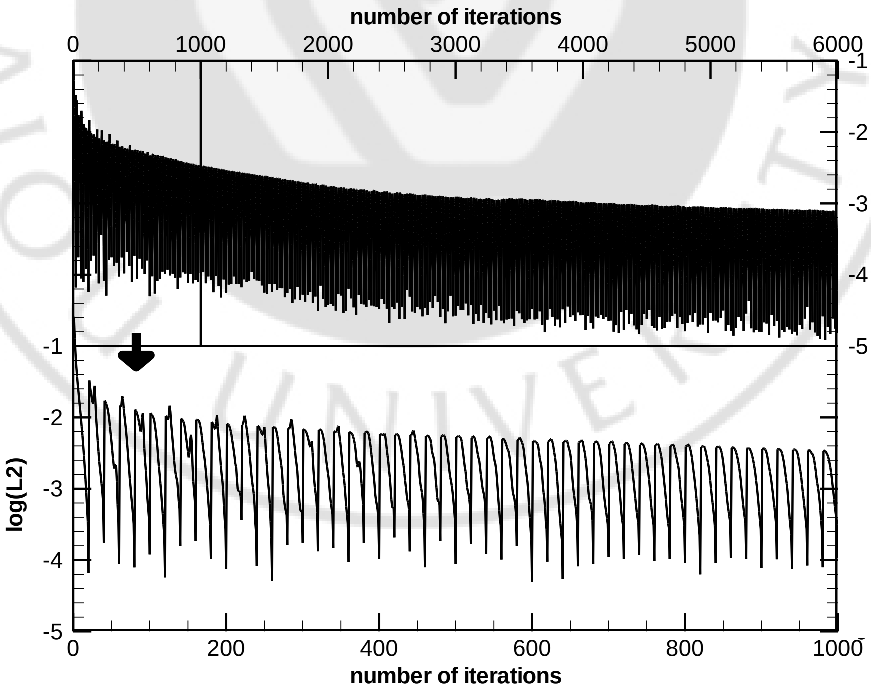

Fig. 29 convergence of unsteady computation of mach 3 wind tunnel with a step

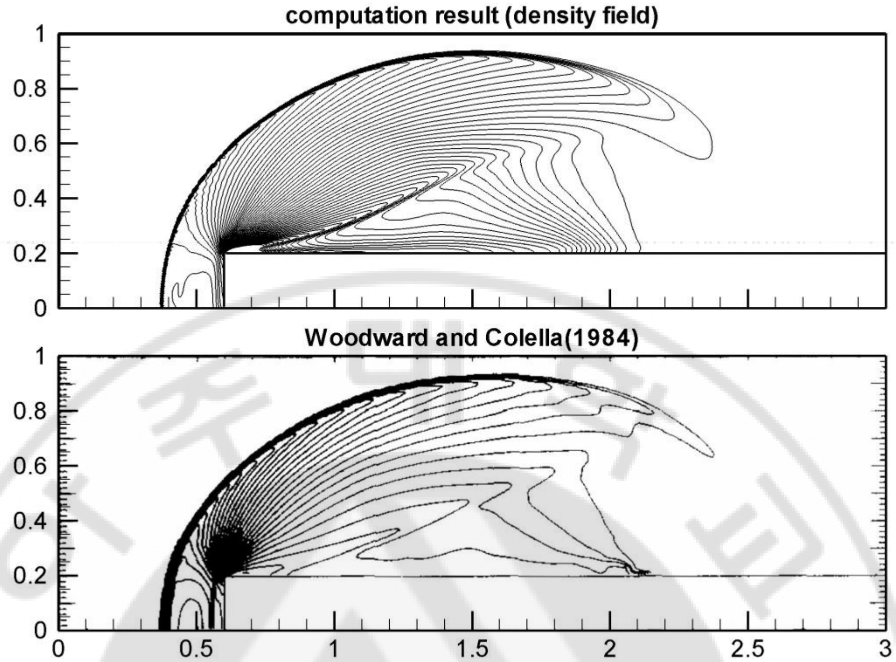

Fig. 30 density contour of wind tunnel with a step problem at 0.5 unit time

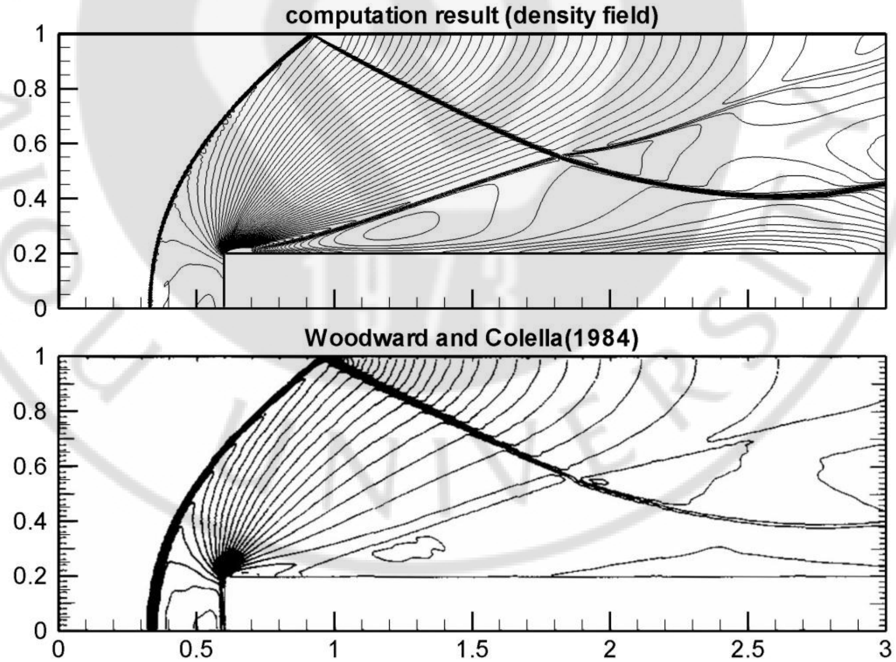

Fig. 31 density contour of wind tunnel with a step problem at 1.0 unit time

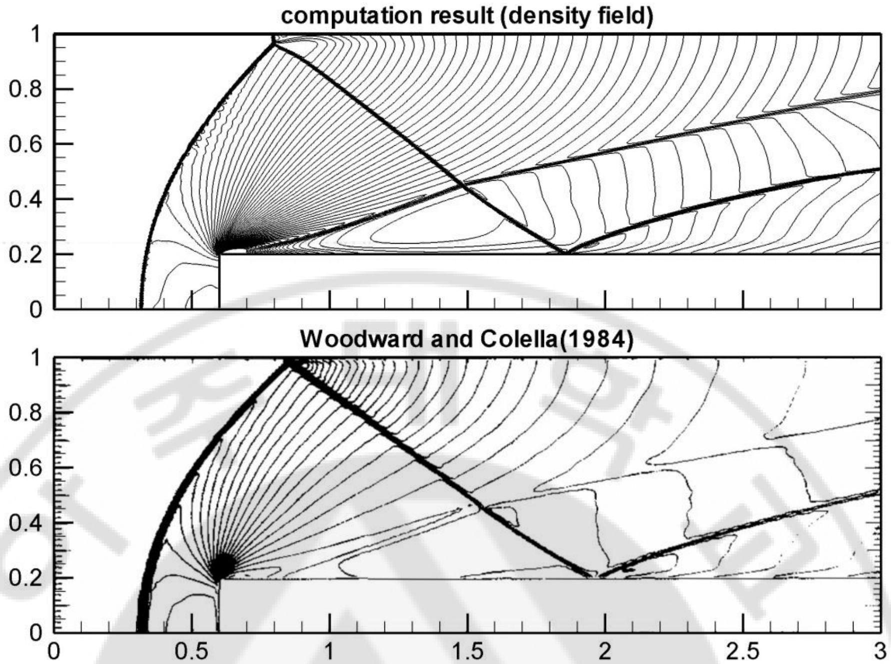

Fig. 32 density contour of wind tunnel with a step problem at 1.5 unit time

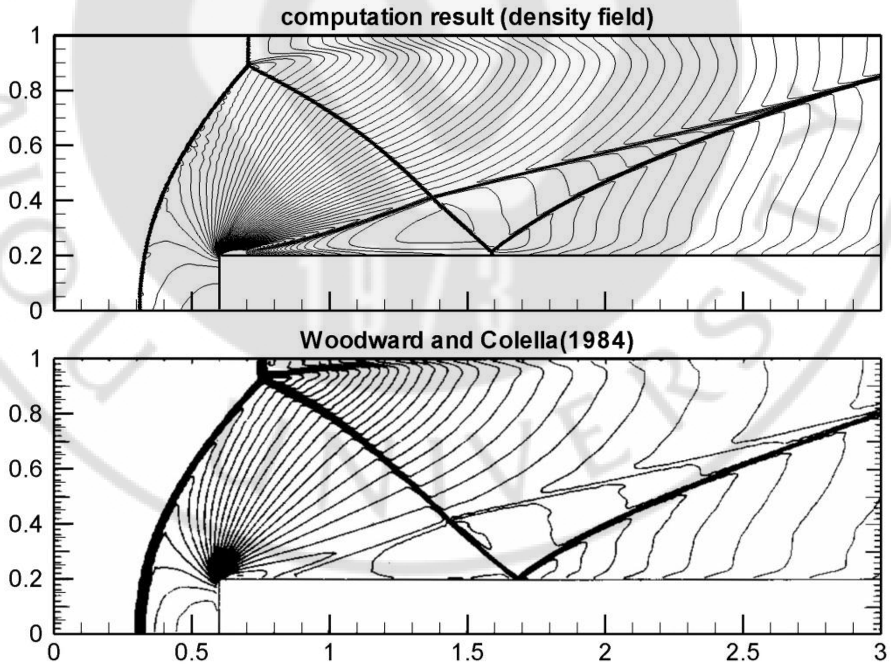

Fig. 33 density contour of wind tunnel with a step problem at 2.0 unit time

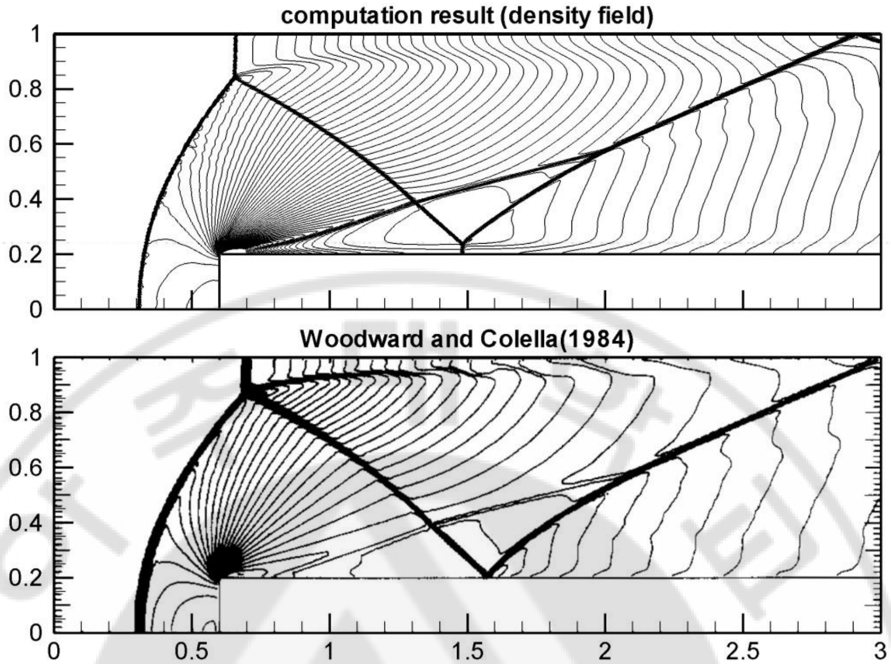

Fig. 34 density contour of wind tunnel with a step problem at 2.5 unit time

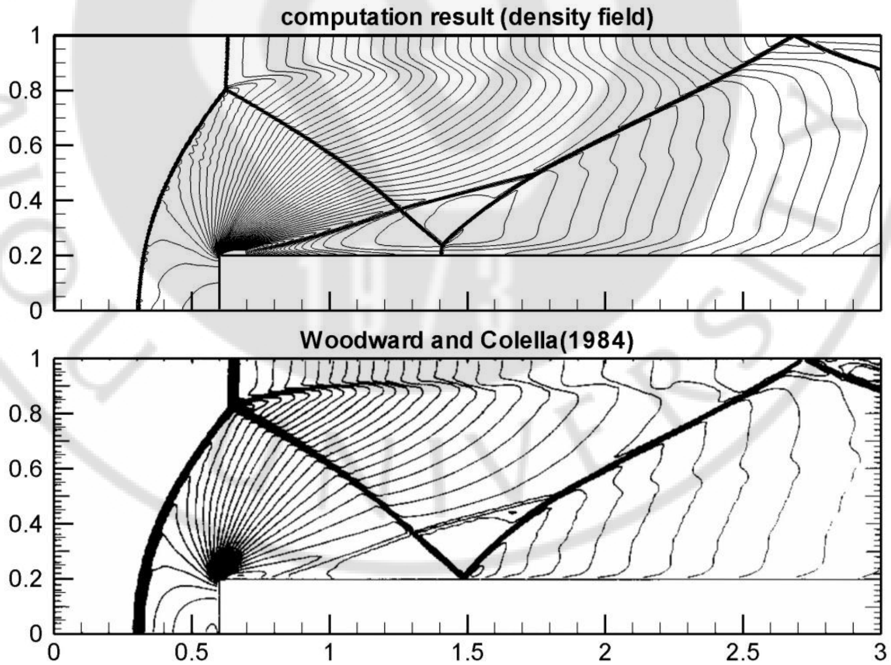

Fig. 35 density contour of wind tunnel with a step problem at 3.0 unit time

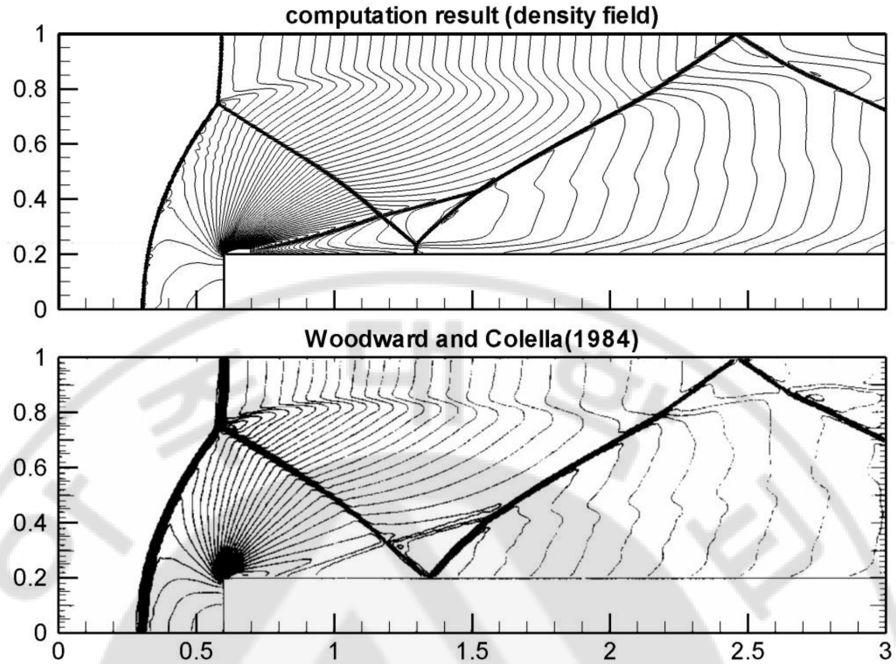

Fig. 36 density contour of wind tunnel with a step problem at 4.0 unit time

단위 시간의 비율에 맞게 해를 Woodward and Colella[42]의 해와 비교한 결과, 0.5 단위 시간에서부터 4.0 단위 시간까지의 해가 모두 유사한 결과를 도출하였으며, 이를 통하여 본 연구에 사용된 GEMS 코드의 이중시간전진법을 통한 비정상 해석 능력을 확인할 수 있었다. Fig. 30부터 Fig. 36까지의 결과 그래프를 통하여 강한 충격파의 발생, 충격파의 반사, 박리, 팽창파의 발생 형태가 동일하며, 그 위치 또한 상당히 유사하게 나타남을 확인하였다. 또한 충격파를 획득함에 있어서 2차 정확도의 기법은 수치 확산을 효과적으로 잘 억제하여 충격파 양단의 급격한 변화를 잘 해석하였다.

비정상 해석은 물리적 시간 진행을 위한 시간 간격을 작게 잡을수록 한 시간 간격 당 수렴이 빠르게 진행됨을 알 수 있었다. 따라서 안정적이고 정확한 계산을 위하여 시간 간격을 작게 쪼개어서 계산을 하는 것이 유리하였으며, 1×10^{-5}초 간격의 작은 시간 간격을 이용함으로써 시간 진행에 따른 변화를 더욱 정밀하게 포착할 수 있었다.

5. 결론

과거에 널리 사용되던 정렬격자계 기반 전산유체 해석 코드는 유한차분법을 사용함으로써 미분 형태의 지배방정식을 바로 적용할 수 있으며, 테일러 급수를 통해 차분 식을 유도하므로 유도 방법이 간편하여 많은 연구가 진행되었다. 하지만 비정렬격자계 기반의 전산유체 해석 코드는 격자 배열 및 연결구조의 임의성으로 인하여 유한차분법을 적용하기 어려우며, 대부분의 경우 Patankar[6]의 유한체적법으로 식을 이산화한다. 본 연구에서는 비정렬격자계를 기반으로 하여 유한체적법을 통해 예조건화 Navier-Stokes 수치기법을 구현한 Merkle CFD Research Group의 GEMS 코드[10,12]를 소스코드 단계에서 분석하고, 코드에서 사용된 지배방정식 및 수치해석 기법을 식으로 표현함으로써, 비정렬격자계에 적용된 예조건화 수치해석 방법 및 알고리즘을 습득하였다. 특히 임의의 상태방정식을 가지는 비압축성 및 압축성 유체에 대하여 일반화된 예조건화 Navier-Stokes 방정식을 해석하기 위한 알고리즘과 수치적 연산 기법의 비정렬격자계에 대한 적용 기법을 집중적으로 분석하였으며, 다양한 격자 형상과 다양한 시험 문제를 해석함으로써 각각의 수치 기법이 실제 문제에 적용되는 과정 및 결과를 확인하였다. 이를 통하여 임의의 격자와 임의의 상태방정식을 가지는 일반 유체에 대한 유동의 수치해석 기법과 알고리즘에 대하여 이해할 수 있었으며, 향후 비정렬격자계를 활용한 다중 스케일 및 다중물리 해석을 포함한 다양한 응용 분야의 CFD 해석 소프트웨어를 개발하기 위한 기반을 마련할 수 있었다.

5.1 비정렬격자계에 대한 수치기법

GEMS 코드는 비정렬격자계를 기반으로 한 전산유체 해석 코드로, 2차원 문제에서 삼각형, 사각형 등 다양한 형태의 다각형 격자를 해석할 수 있으며, 3차원 문제에서 사면체, 육면체, 피라미드, 프리즘 등 다양한 형태의 다면체 격자를 해석할 수 있다. 또한 유한체적 식을 유도하는 과정에서 격자의 형상을 정형화하지 않고 임의의

격자 구조에 대하여 식을 유도하였으므로, 별도의 형상에 대한 처리 없이도 격자 모양이 다양하게 혼재된 비정렬 혼합격자계의 해석이 가능하다. 이는 격자의 형상 및 연결 정보를 포인터 구조로 메모리에 저장함으로써 구현할 수 있으며, 구체적인 메모리 구조는 Appendix A.1에 나타내었다.

유한체적법은 지배방정식을 제어체적에 대하여 적분하여 사용하므로 제어체적에 대한 체적 평균 값을 제어체적을 대표하는 값으로 사용한다. 또한 공간 이산화를 수행하기 위하여 단지 두 체적 사이의 면에서의 값을 내삽하여 유동 벡터를 계산하게 된다. 이로 인하여 유한체적법은 유한차분법에 비해 높은 정밀도의 공간 이산화를 적용하기 까다로우며, 2차 이상의 높은 정밀도의 공간 이산화를 위하여 변화량 구성(gradient construction) 방법을 적용하였다. 본 연구에서는 GEMS 코드에 구현된 최소자승법을 이용한 변화량 구성 방법을 분석하고 2차 상류차분법을 해석하기 위한 시험 문제에 이를 적용하였다. 마하 3의 단차를 가지는 풍동 충격파 문제에서 최소자승법 변화량 구성과 함께 2차 상류차분법을 사용한 결과, 수치적 확산을 효과적으로 억제하여 충격파가 섬세하게 포착되는 결과를 얻을 수 있었다.

비정렬격자계는 격자의 배열 및 연결 구조의 정형성을 가지지 않으므로 임의의 연결 구조에 대한 정보를 메모리에 유지하여야 한다. 또한 수치 기법을 적용할 때 정렬격자계 기반의 코드처럼 격자 배열에 대한 일괄적인 계산이 힘들고, Appendix A.2에 나타난 순서도와 같이 격자의 연결 구조를 따라서 각 수치 기법의 단계 별 계산을 수행하여야 한다. 또한 선형 시스템을 구성하면 불규칙한 형상을 가지는 대형 희소 행렬(large sparse matrix)이 나타난다. 이로 인하여 기존의 정렬격자계 코드에서 주로 사용하였던 블록 삼중대각 해법(block tri-diagonal solver)을 사용할 수 없으며, 임의의 선형 시스템을 해석할 수 있는 기법을 사용하여야 한다. 본 연구에서는 GEMS 코드에 구현된 비정렬격자계를 위한 다양한 수치해법 중 플럭스 벡터 계산에 근사 Riemann 해법 중 하나인 Harten-Lax-van Leer(HLL) 기법을 사용하였으며, 선형 시스템의 해석에 point Gauss-Seidel(PGS) 및 line Gauss-Seidel(LGS)의 두 가지 근사 내재적 해법을 사용하였다. PGS 기법의 경우 기존 정렬격자계에서 사용하던 방법과 완전히 동일한 방법으로 구현할 수 있다. 하지만 LGS 기법은 비정렬격자계에

적용하기 위하여 수정이 필요하며, 비정렬격자계의 연결 구조를 탐색하여 격자를 연결고리(chain) 단위로 잘라 LGS 해석에 필요한 line을 구성할 수 있었다. Suddhoo-Hall 4요소 에어포일 해석 결과를 통해 검증한 결과 PGS 기법은 1회 해석 당 계산시간이 빠른 장점이 있으나 수치적인 안정성이 불안하며 수렴에 필요한 반복 회수가 많은 단점을 가진다. 반면 LGS 기법은 연결 구조의 탐색에 소요되는 시간으로 인해 1회 해석 당 계산시간이 비교적 느리나, 수렴에 필요한 반복 회수가 적고 수치적인 안정성이 뛰어나 높은 CFL 값에서도 안정적인 해석이 가능하였다. 따라서 각 케이스별로 최적의 해석 조건을 설정하여 해석을 수행할 경우, PGS 기법에 비해 LGS 기법이 더욱 효율적임을 확인할 수 있었다.

5.2 다양한 유동 조건에서의 정상 및 비정상 해석

GEMS 코드는 임의의 상태방정식을 가지는 비압축성 및 압축성 일반 유체에 대한 유동 해석 코드로 다양한 속도 및 다양한 유동 조건에 대하여 광범위한 해석 능력을 가진다. 시간전진법을 기반으로 한 일반적인 코드의 경우 저 마하수나 낮은 Reynolds수 유동 조건은 수렴성 저하의 원인으로 작용하나, GEMS 코드는 음속에 대한 속도 척도 및 Reynolds수에 대한 점성 속도 척도를 이용한 예조건화 Navier-Stokes 수치 기법을 도입하여 이러한 한계를 극복하였다.

본 연구에서는 평판 위 층류 경계층 유동 문제를 해석함으로써 저속 점성 유동 조건에서의 예조건화 Navier-Stokes 수치기법의 수렴성과 정확성을 확인하였다. 또한 마하 0.001의 층류 경계층 유동 문제부터 마하 0.2의 비점성 에어포일 문제, 마하 0.725의 천음속 에어포일 문제, 그리고 마하 3.0의 충격파 반사 문제까지 다양한 문제를 해석하여, 예조건화 Navier-Stokes 방정식을 전 속도 영역에서 적용할 수 있음을 보였다. 특히 저속의 유동에서 예조건화를 위한 가상 변수를 활성화하였을 경우 그렇지 않을 경우에 비해 월등히 수렴이 빠름을 확인하였으며, 반대로 예조건화를 비활성화하고 해석하는 경우 수렴이 거의 진행되지 않아 해를 얻을 수 없었다.

또한 이중시간전진법을 통한 비정상 해석을 수행하기 위하여 마하 3.0의 단차를 가지는 풍동에서의 충격파 반사 문제는 비정상 해석을 수행하였다. 물리적 시간이 진행됨에 따라 내부 루프를 통해 가상 시간을 전진시키는 방법으로 비정상 해석에 예조건화를 적용하였으며, 이의 알고리즘을 순서도로 도식화하여 Fig. 2에 표현하였다. 비정상 예조건화 수치 기법에서는 가상 시간의 진행을 통해 각 시간 단계에서의 수렴된 해를 얻을 수 있으며, 예조건화 행렬을 가상 시간 항에만 적용함으로써 비정상적인 시간의 진행을 정확하게 해석할 수 있다. 물리적 시간은 가상 시간의 진행을 통해 해가 수렴이 된 후 한 단계씩 진행되며, 물리적 시간이 진행될 때마다 해를 파일로 저장하여서 시간 변화에 따른 유동 양상의 변화를 확인할 수 있었다.

참고문헌

1. Anderson, W.K., et al., "Sensitivity Analysis for Navier-Stokes Equations on Unstructured Meshes Using Complex Variables," *AIAA Journal*, Vol.39, No.1, 2001, pp.56-63.
2. Park, H., et al., "On Physics-based Preconditioning of the Navier-Stokes Equations," *Journal of Computational Physics*, Vol.228, No.24, 2009, pp.9131-9146.
3. 정문승 and 권오준, "삼차원 정상/비정상 비압축성 유동해석을 위한 비정렬 혼합 격자계 기반의 유동해석 코드 개발," *한국전산유체공학회지*, Vol.13, No.2, 2008, pp.27-41.
4. *ANSYS FLUENT 12.0 Theory Guide*, ANSYS, Inc., 2009.
5. *CFD-FASTRAN Theory Manual*, Huntsville, AL.: CFD Research Corporation, 2002.
6. Patankar, S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, New York, NY.: Hemisphere, 1980.
7. Versteeg, H.K. and W. Malalasekera, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*, 2nd ed., Harlow: Pearson Education Ltd., 2007.
8. Guillard, H., "Recent developments in the computation of compressible low Mach number flows," *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol.76, No.4, 2006, pp.363-369.
9. van der Heul, D.R., C. Vuik, and P. Wesseling, "A Conservative Pressure-Correction Method for Flow at All Speeds," *Computers & Fluids*, Vol.32, No.8, 2003, pp.1113-1132.
10. Li, D., et al., "Convergence Assessment of General Fluid Equations on Unstructured Hybrid Grids," *AIAA-2001-2557: 15th Computational Fluid Dynamics Conference*, Anaheim, CA., 2001.
11. Sharov, D. and K. Nakahashi, "Reordering of Hybrid Unstructured Grids for Lower-Upper Symmetric Gauss-Seidel Computations," *AIAA Journal*, Vol.36,

No.3, 1998, pp.484-486.
12. Li, D. and C.L. Merkle, "A Unified Framework for Incompressible and Compressible Fluid Flows," *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, Vol.18, No.3, Supplement 1, 2006, pp.113-119.
13. Moretti, G. and M. Abbett, "A Time-Dependent Computational Method for Blunt Body Flows," *AIAA Journal*, Vol.4, No.12, 1966, pp.2136-2141.
14. Ng, K.C., et al., "Time-Marching Method for Computations of High-Speed Compressible Flow on Structured and Unstructured Grid," *American Journal of Engineering and Applied Sciences*, Vol.1, No.2, 2008, pp.89-94.
15. Volpe, G., "Performance of Compressible Flow Codes at Low Mach Numbers," *AIAA Journal*, Vol.31, No.1, 1993, pp.49-56.
16. Chorin, A.J., "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems," *Journal of Computational Physics*, Vol.2, No.1, 1967, pp.12-26.
17. Merkle, C.L. and Y.-H. Choi, "Computation of low-speed compressible flows with time-marching procedures," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.25, No.2, 1988, pp.293-311.
18. 이두환, "시간항 예조건화 기법을 이용한 저마하수 압축성 유동 계산의 수렴성 증진," advisor: 최윤호, 석사학위논문, 기계공학과, 아주대학교, 2001.
19. Merkle, C.L. and D. Choi, "Application of Time-Iterative Schemes to Incompressible Flow," *AIAA-1984-1638: 17th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics, and Lasers Conference*, Snowmass, CO., 1984.
20. Choi, Y.-H. and C.L. Merkle, "The Application of Preconditioning in Viscous Flows," *Journal of Computational Physics*, Vol.105, No.2, 1993, pp.207-223.
21. Shuen, J.-S., K.-H. Chen, and Y.-H. Choi, "A Coupled Implicit Method for Chemical Non-equilibrium Flows at All Speeds," *Journal of Computational Physics*, Vol.106, No.2, 1993, pp.306-318.
22. Merkle, C.L., et al., "Computation of Flows with Arbitrary Equations of State," *AIAA Journal*, Vol.36, No.4, 1998, pp.515-521.
23. Viviand, H., "Pseudo-Unsteady Systems for Steady Inviscid Flow Calculations", in *Numerical Methods for the Euler Equations of Fluid Dynamics*. 1985, SIAM, pp. 334-368.

24. Briley, W.R., H. McDonald, and S.J. Shamroth, "A Low Mach Number Euler Formulation and Application to Time-Iterative LBI Schemes," *AIAA Journal*, Vol.21, No.10, 1983, pp.1467-1469.
25. Peyret, R. and H. Viviand, "Pseudo-Unsteady Methods for Inviscid or Viscous Flow Computation", in *Recent Advances in the Aerospace Sciences*. 1985, Plenum Press: New York, NY., pp. 41-47.
26. Turkel, E., "Preconditioned Methods for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations," *Journal of Computational Physics*, Vol.72, No.2, 1987, pp.277-298.
27. Venkateswaran, S. and C.L. Merkle, "Dual Time-Stepping and Preconditioning for Unsteady Computations," *AIAA-1995-0078: 33rd Aerospace Sciences Meeting*, Reno, NV., 1995.
28. Pandya, S.A., S. Venkateswaran, and T.H. Pulliam, "Implementation of Preconditioned Dual-Time Procedures in OVERFLOW," *AIAA-2003-0072: 41st Aerospace Sciences Meeting*, Reno, NV., 2003.
29. Nyukhtikov, M., et al., "Optimized Dual-Time Stepping Technique for Time-Accurate Navier-Stokes Calculations", in *Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics and Aeroelasticity of Turbomachines*. 2006, Springer: Netherlands, pp. 449-459.
30. Merkle, C.L., *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*, Purdue University, 2007.
31. Venkateswaran, S. and C.L. Merkle, *Analysis of Preconditioning Methods for the Euler and Navier-Stokes Equations*, Von Karman Institute, 1999.
32. Housman, J., C. Kiris, and M. Hafez, "Preconditioned Methods for Simulations of Low Speed Compressible Flows," *Computers & Fluids*, Vol.38, No.7, 2009, pp.1411-1423.
33. Roe, P.L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol.43, No.2, 1981, pp.357-372.
34. Harten, A., P.D. Lax, and B. van Leer, "On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws," *SIAM Review*, Vol.25, No.1, 1983, pp.35-61.

35. Einfeldt, B., "On Godunov−type Methods for Gas Dynamics," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol.25, No.2, 1988, pp.294−318.
36. van Leer, B., "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second−order Sequel to Godunov's Method," *Journal of Computational Physics*, Vol.32, No.1, 1979, pp.101−136.
37. Mavriplis, D.J., "Revisiting the Least−Squares Procedure for Gradient Reconstruction on Unstructured Meshes," NASA/CR−2003−212683, NASA Langley Research Center, by N.I.o. Aerospace, 2003.
38. Suddhoo, A. and I.M. Hall, "Test Cases for the Plane Potential Flow Past Multi−Element Aerofoils," *Aeronautical Journal*, Vol.89, No.890, 1985, pp.403−414.
39. Cook, P.H., M.A. McDonald, and M.C.P. Firmin, "Aerofoil RAE 2822 − Pressure Distributions, and Boundary Layer and Wake Measurements," AR−138, Experimental Data Base for Computer Program Assessment, by AGARD, 1979.
40. Slater, J.W., "Compares WIND 5.0 to experimental data: Computational studies peformed for the RAE 2822 transonic airfoil," NPARC Alliance Validation Archive, NASA Glenn Research Center, 2002.
41. Emery, A.F., "An Evaluation of Several Differencing Methods for Inviscid Fluid Flow Problems," *Journal of Computational Physics*, Vol.2, No.3, 1968, pp.306−331.
42. Woodward, P. and P. Colella, "The Numerical Simulation of Two−Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks," *Journal of Computational Physics*, Vol.54, No.1, 1984, pp.115−173.

Appendix

A.1 비정렬격자계 데이터 구조

```
!====== NODE DATA STRUCTURE ======
  type node
      real(kind=rfp)::xyz(ndim)                   ! coordinate
      type(vector)::qv                            ! the solution at each node
  end type node


!====== CELL DATA STRUCTURE ======
  type cell
      integer :: itype                            ! index of cell zone
      type(vector) :: qv, dqv                     ! q and dq variables
      type(vector), pointer :: qvn(:)             ! previous qv variable
      type(vector) :: res                         ! Residual of control volume
      real(kind=rfp), pointer :: gradient(:,:)    ! gradient for interpolation
      real(kind=rfp)  :: vol                      ! volume of control volume
      real(kind=rfp)  :: centp(ndim)              ! centeriod of control volume
      integer,pointer :: c2n(:)                   ! point to nodes
      type(neighbor), pointer :: sface(:)         ! surrounding faces
      type(neighbor_cell), pointer :: scell(:)    ! surrounding neighbour cells
      real(kind=rfp), pointer :: weight(:)        ! Weights for viscous term
      :
  end type cell


!====== FACE DATA STRUCTURE ======
  type face
      integer::itype             ! itype=0  interior face , =1  inflow or outflow
                                 !      =2  inviscous     , =3  viscous wall
                                 !      =5  inlet         , =6  outlet
      type(cell), pointer :: left_cell   ! pointer to left cell
      type(cell), pointer :: right_cell  ! pointer to right cell
      real(kind=rfp)      :: area        ! area of the face
      type(matrix)        :: ajl, ajr    ! left and right Jacobian
      real(kind=rfp)      :: vecn(ndim)  ! unit inward normal vector to left cell
      real(kind=rfp)      :: centp(ndim) ! centroid of the face
      real(kind=rfp)      :: vl, vr      ! volume of left and right cell
      integer, pointer    :: f2n(:)      ! pointer to nodes
      :
  end type face
```

```
!====== NEIGHBOR FACE DATA STRUCTURE ======
  type neighbor
      type(face), pointer  :: to_face           ! pointer to neighbor face
  end type neighbor


!====== NEIGHBOR CELL DATA STRUCTURE ======
  type neighbor_cell
      type(cell), pointer  :: to_cell           ! pointer to neighbor cell
  end type neighbor_cell


!====== CHAIN DATA STRUCTURE FOR LINE GAUSS-SEIDEL ======
  type chain
      type(chain), pointer :: bchain(:)         ! pointer to chain bound
      type(cell), pointer  :: current_cell      ! pointer to current cell
      type(face), pointer  :: current_face      ! pointer to current face
  end type chain


!====== RAW CHAIN DATA STRUCTURE FOR LINE GAUSS-SEIDEL ======
  type raw_chain
      type(chain), pointer :: bchain(:)         ! pointer to chain bound
      integer, pointer     :: nchain(:)         ! pointer to chain number
      integer, pointer     :: icell(:)          ! pointer to cell index
      integer              :: npgs              ! number of cells to use PGS
  end type raw_chain
```

A.2 코드 구조

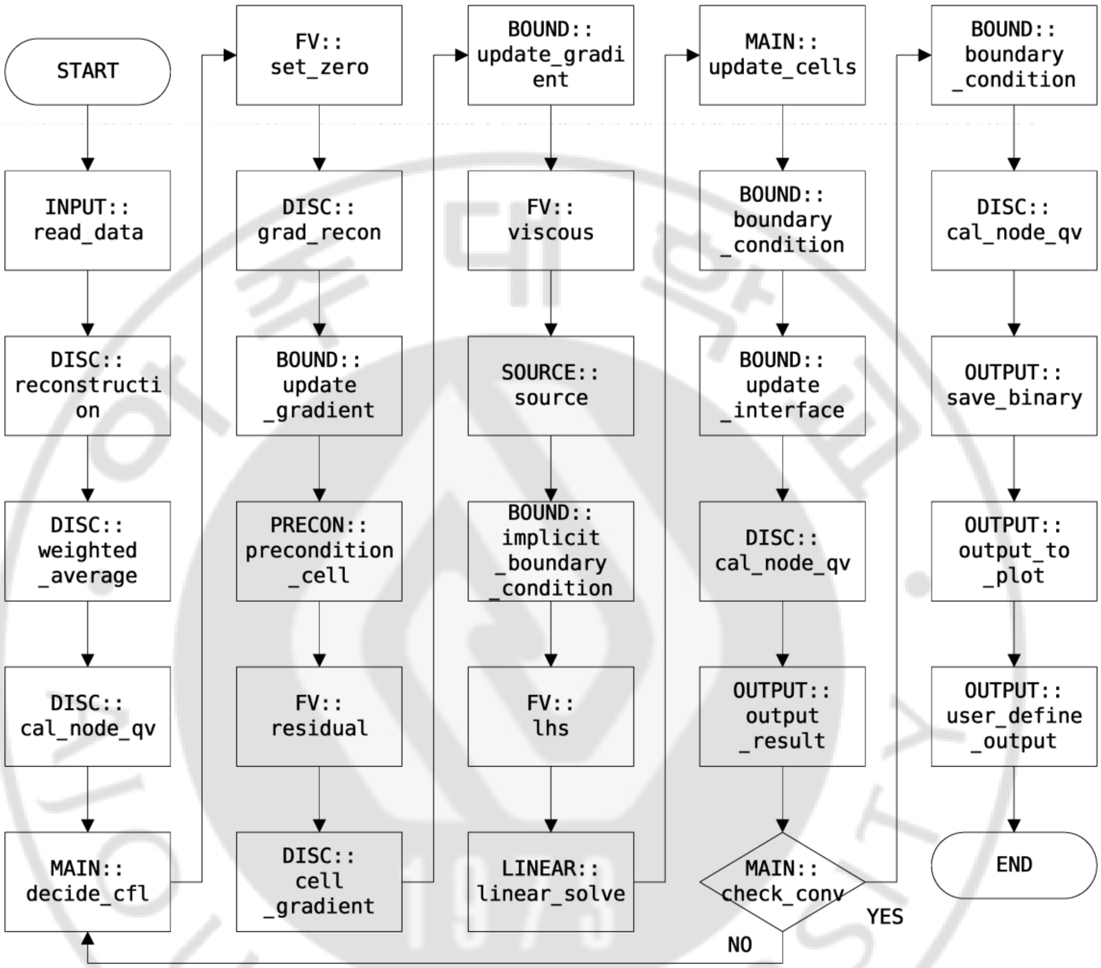

Fig. 37 unstructured solver for preconditioned Navier−Stokes code structure

A.3 입력 파일

A.3.1 평판 위 층류 경계층 유동 해석

```
! Input file for GEMS Code
! Created by Yong-Hoon Lee
! ========================
! DESCRIPTION:
!  Case:                     Laminar Boundary Layer Flow
!  Mesh Type:                2D Structured
!  Number of Cells:          10000
!  Viscosity:                Laminar
!  Preconditioning:          5:max vel and perturbation pressure
!  Solver:                   GMRES
!  Discretization:           2nd order Upwind
!  Gradient Construction:    Weighted Least-Square
!  Riemann Solver:           HLL
!  Time Accuracy:            Steady
!  Fluid:                    Air
!  Boundary:                 Inflow(1), Outflow(1), InviscidWall(1), NoSlipWall(1), Farfield(1)
!  Mach Number:              0.001
!  Temperature:              388.89K
!  Pressure:                 41368.5Pa

&geom
    gridfile = "LaminarBL.neu",         ! Grid File
    nd = 2,                             ! Number of Dimensions = 2D
    lenref   = 0.3048,                  ! Grid was created in (ft)
&end
&solution
    irestart = 0,                   ! 0:First Run / 1:Restart from the Previous Results
    nsteps   = 500000,              ! Number of Iterations
    ivis     = 1,                   ! Viscosity 0:inviscid / 1:laminar / 2:turbulence
    init     = 0,                   ! Indicate how to set initinal condition (0 1 2 3)
    ipre     = 5,                   ! 0:no precondition
                                    ! 1:max vel and viscous vel / 2:max vel and local pressure / 3:max vel
                                    ! 4:only cell vel / 5:max vel and perturbation pressure / 6:cutoff with vnn
    imeth    = 3,                   ! Algorithm 0:Explicit / 1:PGS / 2:LU / 3:GMRES / 4:CGNS / 5:LGS
    isub     = 2,                   ! Number of subiterations for Linear solver
    ialg     = -1,                  ! 0:first order scheme / 1:second order
    irec     = 1,                   ! 1:least square reconstruction  2:dl's reconstruction
    ischeme  = 1,                   ! ischeme = 0:ROE 1:HLL 2:HLLC 3:GODUNOV's
                                    !          -1:ROE with Algebaric Average
                                    ! * HLL:  Harten-Lax-van Leer
                                    ! * HLLC: Harten-Lax-van Leer for Contact Wave
    iscr     = 3,                   ! Print Residual on the Screen
    ifile    = 1,                   ! Write Residual on the File 0:no / 1:yes
    iplot    = 1,                   ! Write Plot File 0:no / 1:tecplot / 2:fieldview
    cflmin   = 0.05,
    cflmax   = 1.0,                 ! CFL:cflmin + (cflmax-cflmin)*it/100; it<100 :cflmax otherwise
                                    ! if cflmin > cflmax cfl = cflmax
    vnn      = 10.0,                ! Von Neumann number
    errm     = -15.0,               ! Stopping criteria log(sqrt(sum(dQ*dQ)/sum(Q*Q))) < errm
    pbase    = 41368.5              ! reference pressure
    irea     = 0,                   ! Number of Reactions
    isource  = 0,                   ! Number of Sources
    iperiodic = 0                   ! Specify using Periodic Boundary (2d case set iperiodic=3)
&end
&unsteady
    idt      = 0,                   ! 0:steady / 1:first order of time derivative / 2:second order
    nt       = 10,                  ! The iterations taken in each real time step of dual step
    imonit   = 10,                  ! 0:no monitoring / 1:output results every each real time to dfd_mon_x.plt
    dt       = 1.0e-4               ! the real time step in second
&end
&gas_prop
    mwi      = 28.9,                ! Molecular weight of each species
    cpi      = 1006.10,             ! Specific heat at constant pressure
    hrefi    = 0.0,                 ! reference enhalpy h=href+Cp(T-Tref)
    htref    = 0.0,                 ! reference temperature
    zmu      = -1.681e-5,           ! Viscosity <0 means constant viscosity
                                    !           otherwise calculate from Suthlander's formula
```

```
    tref     = 273.15,              ! Temperature at sealevel K
    sref     = 110.5,               ! Sutherland's constant K  /  mu = 1.7894e-5(T/T0)^3/2(T0+S)/(T+S)
    pr       = 0.71,                ! Prandtl number
&end
&turb
    lamda    = 10.0,
    cmu      = 1.0e-1,
    ksplus   = 0.1,
&end
&number_of_boundary
    n_in     = 1,                   ! number of inlet boundary patches
    n_out    = 1,                   ! number of outlet boundary patches
    n_far    = 1,                   ! number of farfield (i.e. inlet/outlet) boundary patches
    n_wall   = 2,                   ! number of wall boundary patches
    n_geom   = 0,                   ! number of geom_type conditions
    n_vol    = 0,                   ! number of volume conditions
&end
&inlet
    label    = 1,
    itype    = 0,
    p        = 41368.5,
    t        = 388.89,
    mach     = 0.001,
    alpha    = 0.0,
&end
&outlet
    Label    = 2,
    itype    = 0,
    pback    = 41368.5,
&end
&farfield
    label    = 5,
    itype    = 0,
    p        = 41368.5,
    t        = 388.89,
    mach     = 0.001,
    alpha    = 0.0,
&end
&wall
    label    = 3,
    itype    = 0,                   ! 0 invicid or slip wall
&end
&wall
    Label    = 4,
    itype    = 1,                   ! 1 no-slip wall
&end
&initial_condition
    islast   = 1,
    p        = 41368.5,
    t        = 388.89,
    u        = 0.0,
    mach     = 0.0,
    alpha    = 0.0,
&end
&output_vars
    Perturbation_Pressure=1,
    Mach_Number=1,
    Density=1,
    Enthalpy=1,
    Entropy=1,
    NWPlot=2,
&end
&woutput_vars
    Label=2,
    Temperature=1,
    Vx=1,
    Vy=1,
&end
&woutput_vars
    Label=4,
    Temperature=1,
    Density=1,
    Taw=1,
&end
```

A.3.2 Suddhoo-Hall 4요소 에어포일 유동 해석

```
! Input file for GEMS Code
! Created by Yong-Hoon Lee
! =======================
! DESCRIPTION:
!  Case:                    Mach 0.2 Four Element Airfoil by Suddhoo and Hall
!  Mesh Type:               2D Triangular
!  Number of Cells:         115,636
!  Viscosity:               Inviscid
!  Preconditioning:         Yes (5: Maximum Velocity and Perturbation Pressure)
!  Solver:                  Line Gauss-Seidel
!  Discretization:          2nd order Upwind
!  Gradient Construction:   Weighted Least-Square
!  Riemann Solver:          HLL
!  Time Accuracy:           Steady
!  Fluid:                   Air
!  Boundary:                Farfield(1), Wall(4)
!  Mach Number:             0.2
!  Temperature:             273.15

&geom
    gridfile = "suddhoohallairfoil.neu",     ! Grid File
    nd = 2,                          ! Number of Dimensions = 2D
    lenref   = 1.0,                  ! Grid was created in (m)
&end
&solution
    irestart = 0,                    ! 0:First Run / 1:Restart from the Previous Results
    nsteps   = 100000,               ! Number of Iterations
    ivis     = 0,                    ! Viscosity 0:inviscid / 1:laminar / 2:turbulence
    init     = 0,                    ! Indicate how to set initinal condition (0 1 2 3)
    ipre     = 5,                    ! 0:no precondition
                                     ! 1:max vel and viscous vel / 2:max vel and local pressure / 3:max vel
                                     ! 4:only cell vel / 5:max vel and perturbation pressure / 6:cutoff with vnn
    imeth    = 5,                    ! Algorithm 0:Explicit / 1:PGS / 2:LU / 3:GMRES / 4:CGNS / 5:LGS
    isub     = 2,                    ! Number of subiterations for Linear solver
    ialg     = -1,                   ! 0:first order scheme / 1:second order
    irec     = 1,                    ! 1:least square reconstruction  2:dl's reconstruction
    ischeme  = 1,                    ! ischeme = 0:ROE 1:HLL 2:HLLC 3:GODUNOV's
                                     !          -1:ROE with Algebaric Average
                                     ! * HLL:  Harten-Lax-van Leer
                                     ! * HLLC: Harten-Lax-van Leer for Contact Wave
    iscr     = 3,                    ! Print Residual on the Screen
    ifile    = 1,                    ! Write Residual on the File 0:no / 1:yes
    iplot    = 1,                    ! Write Plot File 0:no / 1:tecplot / 2:fieldview

    cflmin   = 0.01,
    cflmax   = 0.85,                 ! CFL:cflmin + (cflmax-cflmin)*it/100; it<100 :cflmax otherwise
                                     ! if cflmin > cflmax cfl = cflmax
    vnn      = 10.0,                 ! Von Neumann number
    errm     = -15.0,                ! Stopping criteria log(sqrt(sum(dQ*dQ)/sum(Q*Q))) < errm
    pbase    = 101325.0              ! reference pressure
    irea     = 0,                    ! Number of Reactions
    isource  = 0,                    ! Number of Sources
    iperiodic = 0                    ! Specify using Periodic Boundary (2d case set iperiodic=3)
&end
&unsteady
    idt      = 0,                    ! 0:steady / 1:first order of time derivative / 2:second order
    nt       = 10,                   ! The iterations taken in each real time step of dual step
    imonit   = 1,                    ! 0:no monitoring / 1:output results every each real time to dfd_mon_x.plt
    dt       = 1.0e-3                ! the real time step in second
&end
&gas_prop
    mwi      = 28.9,                 ! Molecular weight of each species
    cpi      = 1006.10,              ! Specific heat at constant pressure
    hrefi    = 0.0,                  ! reference enhalpy h=href+Cp(T-Tref)
    htref    = 0.0,                  ! reference temperature
    zmu      = -1.681e-5,            ! Viscosity <0 means constant viscosity
                                     !           otherwise calculate from Suthlander's formula
    tref     = 273.15,               ! Temperature at sealevel K
    sref     = 110.5,                ! Sutherland's constant K
                                     ! mu = 1.7894e-5(T/T0)^3/2(T0+S)/(T+S)
    pr       = 0.71,                 ! Prandtl number
&end
&turb
```

```
    lamda    = 10.0,
    cmu      = 1.0e-1,
    ksplus   = 0.1,
&end
&number_of_boundary
    n_in     = 0,                 ! number of inlet boundary patches
    n_out    = 0,                 ! number of outlet boundary patches
    n_far    = 1,                 ! number of farfield (i.e. inlet/outlet) boundary patches
    n_wall   = 4,                 ! number of wall boundary patches
    n_geom   = 0,                 ! number of geom_type conditions
    n_vol    = 0,                 ! number of volume conditions
&end
&farfield
    label    = 1,
    itype    = 0,
    p        = 101325.0,
    t        = 273.15,
    mach     = 0.2,
&end
&wall
    label    = 2,
    itype    = 0                  ! 0 invicid or slip wall
&end
&wall
    label    = 3,
    itype    = 0                  ! 0 invicid or slip wall
&end
&wall
    label    = 4,
    itype    = 0                  ! 0 invicid or slip wall
&end
&wall
    label    = 5,
    itype    = 0                  ! 0 invicid or slip wall
&end
&initial_condition
    islast   = 1,
    p        = 101325.0,
    t        = 273.15,
    mach     = 0.2,
    alpha    = 0.0,
&end
&output_vars
    Perturbation_Pressure=1,
    Mach_Number=1,
    Density=1,
    Enthalpy=1,
    Entropy=1,
    NWPlot=4,
&end
&woutput_vars
    Label=2,
    Pressure=1,
    Temperature=1,
    YPlus=1,
&end
&woutput_vars
    Label=3,
    Pressure=1,
    Temperature=1,
    YPlus=1,
&end
&woutput_vars
    Label=4,
    Pressure=1,
    Temperature=1,
    YPlus=1,
&end
&woutput_vars
    Label=5,
    Pressure=1,
    Temperature=1,
    YPlus=1,
&end
```

A.3.3 RAE-2822 천음속 에어포일 유동 해석

```
! Input file for GEMS Code
! Created by Yong-Hoon Lee
! ========================
! DESCRIPTION:
!  Case:                    RAE2822 Transonic Airfoil Case
!  Mesh Type:               2D Structured
!  Number of Cells:         23552
!  Viscosity:               Inviscid
!  Preconditioning:         None
!  Solver:                  Line Gauss-Seidel
!  Discretization:          2nd order Upwind
!  Gradient Construction:   Weighted Least-Square
!  Riemann Solver:          HLL
!  Time Accuracy:           Steady
!  Fluid:                   Air
!  Boundary:                Farfield(1), Wall(1)
!  Mach Number:             0.725
!  Temperature:             255.6

&geom
    gridfile = "RAE2822.neu",        ! Grid File (Uniform Quad Mesh)
    nd = 2,                          ! Number of Dimensions = 2D
    lenref   = 1.0,                  ! Grid was created in (m)
&end
&solution
    irestart = 0,                    ! 0:First Run / 1:Restart from the Previous Results
    nsteps   = 5000,                 ! Number of Iterations
    ivis     = 0,                    ! Viscosity 0:inviscid / 1:laminar / 2:turbulence
    init     = 0,                    ! Indicate how to set initinal condition (0 1 2 3)
    ipre     = 0,                    ! 0:no precondition
                                     ! 1:max vel and viscous vel / 2:max vel and local pressure / 3:max vel
                                     ! 4:only cell vel / 5:max vel and perturbation pressure / 6:cutoff with vnn
    imeth    = 5,                    ! Algorithm 0:Explicit / 1:PGS / 2:LU / 3:GMRES / 4:CGNS / 5:LGS
    isub     = 2,                    ! Number of subiterations for Linear solver
    ialg     = -1,                   ! 0:first order scheme / 1:second order
    irec     = 1,                    ! 1:least square reconstruction  2:dl's reconstruction
    ischeme  = 1,                    ! ischeme = 0:ROE 1:HLL 2:HLLC 3:GODUNOV's
                                     !          -1:ROE with Algebaric Average
                                     ! * HLL:  Harten-Lax-van Leer
                                     ! * HLLC: Harten-Lax-van Leer for Contact Wave
    iscr     = 3,                    ! Print Residual on the Screen
    ifile    = 1,                    ! Write Residual on the File 0:no / 1:yes
    iplot    = 1,                    ! Write Plot File 0:no / 1:tecplot / 2:fieldview

    cflmin   = 0.01,
    cflmax   = 2.0,                  ! CFL:cflmin + (cflmax-cflmin)*it/100; it<100 :cflmax otherwise
                                     ! if cflmin > cflmax cfl = cflmax
    vnn      = 10.0,                 ! Von Neumann number
    errm     = -15.0,                ! Stopping criteria log(sqrt(sum(dQ*dQ)/sum(Q*Q))) < errm
    pbase    = 101325.0              ! reference pressure
    irea     = 0,                    ! Number of Reactions
    isource  = 0,                    ! Number of Sources
    iperiodic = 0                    ! Specify using Periodic Boundary (2d case set iperiodic=3)
&end
&unsteady
    idt      = 0,                    ! 0:steady / 1:first order of time derivative / 2:second order
    nt       = 10,                   ! The iterations taken in each real time step of dual step
    imonit   = 10,                   ! 0:no monitoring / 1:output results every each real time to dfd_mon_x.plt
    dt       = 1.0e-4                ! the real time step in second
&end
&gas_prop
    mwi      = 28.9,                 ! Molecular weight of each species
    cpi      = 1006.10,              ! Specific heat at constant pressure
    hrefi    = 0.0,                  ! reference enhalpy h=href+Cp(T-Tref)
    htref    = 0.0,                  ! reference temperature
    zmu      = -1.681e-5,            ! Viscosity <0 means constant viscosity
                                     !           otherwise calculate from Suthlander's formula
    tref     = 273.15,               ! Temperature at sealevel K
    sref     = 110.5,                ! Sutherland's constant K
                                     ! mu = 1.7894e-5(T/T0)^3/2(T0+S)/(T+S)
    pr       = 0.71,                 ! Prandtl number
&end
&turb
```

```
    lamda    = 10.0,
    cmu      = 1.0e-1,
    ksplus   = 0.1,
&end
&number_of_boundary
    n_in     = 0,                   ! number of inlet boundary patches
    n_out    = 0,                   ! number of outlet boundary patches
    n_far    = 1,                   ! number of farfield (i.e. inlet/outlet) boundary patches
    n_wall   = 1,                   ! number of wall boundary patches
    n_geom   = 0,                   ! number of geom_type conditions
    n_vol    = 0,                   ! number of volume conditions
&end
&farfield
    label    = 1,
    itype    = 0,
    p        = 101325.0,
    t        = 255.6,
    mach     = 0.725,
    alpha    = 2.31,
&end
&wall
    label    = 2,
    itype    = 0,                   ! 0 invicid or slip wall
&end
&initial_condition
    islast   = 1,
    p        = 101325.0,
    t        = 273.15,
    mach     = 0.725,
    alpha    = 2.31,
&end
&output_vars
    Perturbation_Pressure=1,
    Mach_Number=1,
    Density=1,
    Enthalpy=1,
    Entropy=1,
    NWPlot=1,
&end
&woutput_vars
    Label=2,
    Pressure=1,
    Temperature=1,
    YPlus=1,
&end
```

A.3.4 단차를 가지는 풍동 충격파 해석

```
! Input file for GEMS Code
! Created by Yong-Hoon Lee
! ========================
! DESCRIPTION:
!  Case:                    2D Mach 3 Wind Tunnel with a Step Case
!  Mesh Type:               2D Triangular
!  Number of Cells:         225792
!  Viscosity:               Inviscid
!  Preconditioning:         None
!  Solver:                  Point Gauss-Seidel
!  Discretization:          2nd order Upwind
!  Gradient Construction:   Weighted Least-Square
!  Riemann Solver:          HLL
!  Time Accuracy:           Unsteady
!  Fluid:                   Air
!  Boundary:                Inlet(1), Outlet(1), Wall(1)
!  Mach Number:             3.0
!  Temperature:             273.15

&geom
    gridfile = "STEPM3_2M.neu",     ! Grid File
    nd = 2,                         ! Number of Dimensions = 2D
    lenref   = 1.0,                 ! Grid was created in (m)
&end
&solution
    irestart = 0,                   ! 0:First Run / 1:Restart from the Previous Results
    nsteps   = 100000,              ! Number of Iterations
    ivis     = 0,                   ! Viscosity 0:inviscid / 1:laminar / 2:turbulence
    init     = 0,                   ! Indicate how to set initinal condition (0 1 2 3)
    ipre     = 0,                   ! 0:no precondition
                                    ! 1:max vel and viscous vel / 2:max vel and local pressure / 3:max vel
                                    ! 4:only cell vel / 5:max vel and perturbation pressure / 6:cutoff with vnn
    imeth    = 1,                   ! Algorithm 0:Explicit / 1:PGS / 2:LU / 3:GMRES / 4:CGNS / 5:LGS
    isub     = 2,                   ! Number of subiterations for Linear solver
    ialg     = -1,                  ! 0:first order scheme / 1:second order
    irec     = 1,                   ! 1:least square reconstruction  2:dl's reconstruction
    ischeme  = 1,                   ! ischeme = 0:ROE 1:HLL 2:HLLC 3:GODUNOV's
                                    !          -1:ROE with Algebaric Average
                                    ! * HLL:  Harten-Lax-van Leer
                                    ! * HLLC: Harten-Lax-van Leer for Contact Wave
    iscr     = 3,                   ! Print Residual on the Screen
    ifile    = 1,                   ! Write Residual on the File 0:no / 1:yes
    iplot    = 1,                   ! Write Plot File 0:no / 1:tecplot / 2:fieldview

    cflmin   = 0.1,
    cflmax   = 0.5,                 ! CFL:cflmin + (cflmax-cflmin)*it/100; it<100 :cflmax otherwise
                                    ! if cflmin > cflmax cfl = cflmax
    vnn      = 10.0,                ! Von Neumann number
    errm     = -15.0,               ! Stopping criteria log(sqrt(sum(dQ*dQ)/sum(Q*Q))) < errm
    pbase    = 101325.0             ! reference pressure
    irea     = 0,                   ! Number of Reactions
    isource  = 0,                   ! Number of Sources
    iperiodic = 0                   ! Specify using Periodic Boundary (2d case set iperiodic=3)
&end
&unsteady
    idt      = 2,                   ! 0:steady / 1:first order of time derivative / 2:second order
    nt       = 10,                  ! The iterations taken in each real time step of dual step
    imonit   = 1,                   ! 0:no monitoring / 1:output results every each real time to dfd_mon_x.plt
    dt       = 1.0e-5               ! the real time step in second
&end
&gas_prop
    mwi      = 28.9,                ! Molecular weight of each species
    cpi      = 1006.10,             ! Specific heat at constant pressure
    hrefi    = 0.0,                 ! reference enhalpy h=href+Cp(T-Tref)
    htref    = 0.0,                 ! reference temperature
    zmu      = -1.681e-5,           ! Viscosity <0 means constant viscosity
                                    !           otherwise calculate from Suthlander's formula
    tref     = 273.15,              ! Temperature at sealevel K
    sref     = 110.5,               ! Sutherland's constant K
                                    ! mu = 1.7894e-5(T/T0)^3/2(T0+S)/(T+S)
    pr       = 0.71,                ! Prandtl number
&end
&turb
```

```
    lamda    = 10.0,
    cmu      = 1.0e-1,
    ksplus   = 0.1,
&end
&number_of_boundary
    n_in     = 1,                   ! number of inlet boundary patches
    n_out    = 1,                   ! number of outlet boundary patches
    n_far    = 0,                   ! number of farfield (i.e. inlet/outlet) boundary patches
    n_wall   = 1,                   ! number of wall boundary patches
    n_geom   = 2,                   ! number of geom_type conditions
    n_vol    = 0,                   ! number of volume conditions
&end
&inlet
    label    = 1,                   ! Label of the Boundary
    itype    = 0,                   ! Inlet Type 0:p,t,mach / 1:p,t,u
    p        = 101325.0,
    t        = 273.15,
    mach     = 3.0,
&end
&outlet
    label    = 2,
    itype    = 0,
    pback    = 101325.0,
&end
&wall
    label    = 5,
    itype    = 0,                   ! 0 invicid or slip wall
&end
&geom_type
    label    = 3,
    itype    = 0,                   ! = 0 symmetry 1 Axisymmetry 2 periodic
&end
&geom_type
    label    = 4,
    itype    = 0,                   ! = 0 symmetry 1 Axisymmetry 2 periodic
&end
&initial_condition
    islast   = 1,
    p        = 101325.0,
    t        = 273.15,
    mach     = 3.0,
    alpha    = 0.0,
&end
&output_vars
    Perturbation_Pressure=1,
    Mach_Number=1,
    Density=1,
    Enthalpy=1,
    Entropy=1,
&end
```

Abstract

The analysis of a preconditioned Navier–Stokes solver with an unstructured grid system has been performed to comprehend the numerical algorithm and techniques; the code has been evaluated by solving several test problems. To overcome the slow convergence problem in time marching scheme for the low mach number regime, a preconditioning method has been applied which changes governing equations by replacing time derivative term with artificial variables. Also, a dual time stepping method has been applied to solve unsteady problems. The unstructured grid system has been employed with the finite volume method which has a high degree of freedom in generating grid for complex geometry. The second–order upwind scheme using least–square gradient construction has been applied for a low numerical diffusion. Euler implicit method has been applied for the discretization of time derivative term. The point Gauss–Seidel(PGS) and the line Gauss–Seidel(LGS) have been used to solve linear system of equations. Finally, the convergence and the validity of the solution have been verified by solving several test problems. A wide range of flow problems from low mach number(M=0.001) laminar flow to supersonic(M=3) shock reflection has been used to verify the convergence and the accuracy of the solutions for both inviscid and viscous flow. Also the performance of the PGS and the LGS solvers has been compared. Computational results indicate that the LGS solver solves the problem faster because the maximum allowable CFL number for the LGS solver is higher than the maximum allowable CFL number for the PGS solver.